

**Titre:** Estimation en temps réel de la conductivité hydraulique non saturée  
**Title:** au cours d'une infiltration d'eau à travers un sol

**Auteur:** Nadia Ouellet  
**Author:**

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Ouellet, N. (2003). Estimation en temps réel de la conductivité hydraulique non saturée au cours d'une infiltration d'eau à travers un sol [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
**Citation:** <https://publications.polymtl.ca/7142/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7142/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de  
recherche:**  
**Advisors:**

**Programme:** Non spécifié  
**Program:**

In compliance with the  
Canadian Privacy Legislation  
some supporting forms  
may have been removed from  
this dissertation.

While these forms may be included  
in the document page count,  
their removal does not represent  
any loss of content from the dissertation.



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ESTIMATION EN TEMPS RÉEL DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE  
NON SATURÉE AU COURS D'UNE INFILTRATION D'EAU  
À TRAVERS UN SOL

NADIA OUELLET

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CHIMIQUE)

AOÛT 2003



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-612-86421-9*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-612-86421-9*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ESTIMATION EN TEMPS RÉEL DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE  
NON SATURÉE AU COURS D'UNE INFILTRATION D'EAU  
À TRAVERS UN SOL

présenté par: OUELLET Nadia

en vue de l'obtention du diplôme de Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. HEUZEY, Marie-Claude, Ph.D., présidente

M. PERRIER Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BERTRAND François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. SCHOEFS Olivier, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie le professeur Michel Perrier, mon directeur de recherche, pour m'avoir permis de travailler dans son groupe de recherche, pour m'avoir fait vivre des expériences scientifiques très enrichissantes et pour sa contribution financière. Son expertise en contrôle des procédés et sa joie de vivre ont marqué mon parcours personnel.

Je remercie également le professeur François Bertrand, mon codirecteur de recherche, pour sa grande disponibilité, son optimisme à toute épreuve et son soutien constant. Son apport au niveau de la partie numérique de mon projet est plus que notable et je lui suis très reconnaissante pour sa patience et pour la confiance dont il a fait preuve à mon égard.

Je remercie Olivier Schoefs pour m'avoir initiée à ce projet de recherche et pour m'avoir permis d'utiliser ses résultats expérimentaux et ses résultats de simulation. La distance nous séparant aurait pu être nuisible, mais la rapidité avec laquelle il répondait à mes questions et la clarté de ses réponses m'ont grandement facilité la tâche.

Je remercie également le département de génie chimique pour m'avoir permis d'acquérir une expérience d'auxiliaire en enseignement. De plus, je tiens à souligner l'efficacité du personnel de secrétariat du département.

Par ailleurs, je remercie le professeur André Garon du département de génie mécanique pour son aide au début de mon projet. Son cours « Éléments finis en thermofluide » m'a donné une solide base pour l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Je remercie le CRSNG et la fondation de l'École Polytechnique pour leurs contributions financières.

Je tiens à souligner l'apport significatif de mes collègues de l'URCPC à la qualité de mon séjour à l'École Polytechnique. En particulier, merci à Nicolas, Lyne, Charles, Marie-Christine, Olivier, Emmanuel et Michal. Je me souviendrai longtemps des péripéties vécues à la conférence de Waterloo. Merci aussi à Jean-Dobey et Nancy, anciens de l'URCPC, pour leurs judicieux conseils.

Enfin, je remercie chaleureusement mon copain Christian Jacques, ma famille et mes ami(e)s pour leurs encouragements et pour avoir patiemment enduré les plaintes et sautes d'humeur relatives à mon projet. Ils m'ont permis de garder le moral lorsque les temps étaient plus difficiles.



## RÉSUMÉ

L'implantation de stratégies de contrôle dans le cas des procédés de biodégradation d'un polluant dans un sol non saturé est confrontée, d'une part, à la difficulté de mesurer en ligne certains paramètres et, d'autre part, à la complexité des phénomènes hydrodynamiques et biocinétiques impliqués.

L'idée derrière ce projet est d'estimer en temps réel la conductivité hydraulique non saturée, paramètre qui revêt une importance majeure pour déterminer la nature du sol qui doit être décontaminé. Ce paramètre apparaît dans l'équation de Richards, laquelle est couramment utilisée pour décrire une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé. Cette équation différentielle partielle parabolique est fortement non linéaire; sa résolution à l'aide d'une méthode numérique requiert donc une attention particulière.

De récents travaux proposent un capteur-logiciel basé sur la structure d'estimateur/observateur pour estimer en temps réel la conductivité hydraulique non saturée à partir de mesures en ligne de la succion  $\psi_w$ . Ce capteur-logiciel est construit d'après une solution de l'équation de Richards par la méthode des différences finies (MDF). Cependant, les profils de la succion prédite  $\hat{\psi}_w$  souffrent de la présence de fortes oscillations en régime transitoire.

L'objectif de cette étude est donc d'améliorer la performance de ce capteur-logiciel. Pour ce faire, la méthode des éléments finis (MEF), réputée pour sa flexibilité et son adaptabilité, est utilisée pour résoudre l'équation de Richards. Ainsi le modèle d'estimateur/observateur (ou capteur-logiciel) précédemment construit doit-il être modifié selon la structure de cette méthode numérique. De fait, la discrétisation de l'équation de Richards selon la MEF ne permettant pas l'identification d'un régresseur pour le paramètre que nous voulons estimer, il importe de construire un modèle d'estimateurs/observateur à deux paramètres.

Au niveau des simulations de l'équation de Richards, il ressort que le pas de temps  $\Delta t$  et la taille de maille  $\Delta z$  utilisés dans la résolution par la MEF doivent être diminués conjointement pour que les courbes simulées tendent vers celles obtenues avec la MDF. De plus, une analogie entre l'équation de Richards et l'équation de convection-diffusion permet de dégager un nombre de Peclet local pour l'infiltration et montre que  $\Delta z$  joue un rôle très important dans les simulations. En effet, le schéma en temps utilisé dans notre stratégie impliquant un  $\Delta t$  constant, il est démontré que  $\Delta z$  doit aussi être considéré pour assurer la stabilité des résultats. Par ailleurs, d'importantes oscillations numériques polluent les résultats de simulation à la base du front d'eau. Deux stratagèmes numériques peuvent être envisagés pour éliminer ces oscillations, soit de l'upwinding ou une diminution de  $\Delta z$ . Cependant, des inconvénients majeurs surviennent lors de leur application à l'équation de Richards. D'abord, l'expression complexe du terme de vitesse dans l'équation de Richards transformée rend l'utilisation

d'upwinding plutôt ardue et, d'autre part, la nature très sèche du sol au départ fait en sorte que le nombre de Peclet à la position du front d'eau est trop élevé pour qu'une diminution de  $\Delta z$  puisse contrôler la stabilité de l'infiltration.

Au niveau de la construction de l'algorithme d'estimation/observation (capteur-logiciel) appliqué à l'équation de Richards, la méthodologie utilisée dans ce projet est intéressante pour prédire la succion  $\hat{\psi}_w$  en régime transitoire. En effet, la résolution du modèle en  $\hat{\psi}_w$  plutôt qu'en  $\psi_w$  fait en sorte que les oscillations à la base du front d'eau prédit sont éliminées. Cependant, l'estimation des paramètres du modèle n'a pas mené à des résultats concluants. Lorsqu'une analyse de convergence est effectuée pour identifier des relations pour le réglage des gains du modèle, les résultats montrent que le polynôme caractéristique découlant de l'analyse de convergence du modèle résolu en  $\hat{\psi}_w$  ne comporte pas d'information sur les gains des équations d'estimation. Bref, aucune relation ne peut être dégagée de cette analyse afin qu'un réglage des gains pour l'estimation soit effectué.

En définitive, l'utilisation de la MEF plutôt que la MDF pour résoudre l'équation de Richards et pour simuler un modèle d'estimateur/observateur (capteur-logiciel) ne permet pas d'améliorer significativement la performance de ce dernier pour l'estimation en temps réel de la conductivité hydraulique non saturée. Cependant, les profils de la

succion prédite  $\hat{\psi}_w$  ne souffrent plus de la présence de fortes oscillations en régime transitoire. Ceci est imputable à la résolution du modèle d'observation en  $\hat{\psi}_w$  plutôt qu'en  $\psi_w$  et non à l'utilisation de la MEF comme méthode de résolution numérique. Les recherches doivent donc se poursuivre dans le but d'améliorer la performance du capteur-logiciel développé selon un développement de l'équation de Richards par la MEF.

## ABSTRACT

Implementation of control strategies on bioremediation processes for unsaturated soil is subjected, on the one hand, to the lack of reliable on-line measurements of relevant parameters and, on the other hand, to the complexity of the hydrodynamic and biokinetic phenomena involved in these processes.

The aim of this project consists of developing an on-line estimator for the unsaturated hydraulic conductivity, a parameter that is of major importance for determining the nature of the soil to be decontaminated. This parameter appears in Richards equation, which is a classical model to describe unsaturated flow in a porous medium. It is a highly non-linear parabolic partial differential equation requiring particular considerations regarding its numerical solution scheme.

Recently, an observer-based estimator (software-sensor) for the unsaturated hydraulic conductivity based on suction on-line measurements  $\psi_w$  and on a finite difference solution of the Richards equation was proposed. However, this strategy suffered from the presence of oscillations in the predicted suction profiles  $\hat{\psi}_w$  at unsteady-state. The objective of this project is to propose a novel strategy for tackling this problem that relies upon a modification of the observer-based estimator and a finite element method (FEM) for solving the Richards equation. Indeed, a finite element space discretization

of the Richards equation implies that a two parameter observer-based estimator has to be built.

The Richards equation simulation results show that the suction profiles obtained from the FEM need a decrease of both time step  $\Delta t$  and mesh size  $\Delta z$  in order to tend towards the profiles obtained from the finite difference method (FDM). Also, the similarity in shape between the transformed form of the Richards equation and the advective-diffusive equation allows the identification of a local Peclet number and shows that  $\Delta z$  is of major importance in the numerical simulations. Indeed, it is shown that  $\Delta z$  has to be considered to ensure stability of the simulation results as the time scheme used in our strategy implies a constant value for  $\Delta t$ . In other respects, the simulated wetting front is subjected to important numerical oscillations at its basis. In order to alleviate those oscillations, upwinding or a decrease of  $\Delta z$  has to be added to the Richards equation solution scheme. However, once applied to this equation, those numerical stratagems are getting difficult to use. First, the complexity of the expression for the flow velocity in the transformed form of the Richards equation makes the use of upwinding quite difficult. Also, the dry initial conditions of the infiltration make a decrease of the  $\Delta z$  incapable for controlling the Peclet number at the position of the water front, so the stability of the results.

Regarding the design of an observer-based estimator based on a finite element solution of the Richards equation, the results are interesting for predicting the suction profiles

$\hat{\psi}_w$  at unsteady-state. Indeed, the oscillations at the basis of the predicted suction profiles  $\hat{\psi}_w$  are eliminated because the model is now solved in  $\hat{\psi}_w$  instead of in  $\psi_w$ . However, model parameter estimation is not conclusive when this strategy is used. A convergence analysis is therefore performed for identifying some relations that could help for choosing the gains of the model. The results show that the characteristic equation obtained from a convergence analysis of the  $\hat{\psi}_w$  solved model contains no information at all on the estimator gains. In short, this convergence analysis does not allow the identification of any type of relation that could help for determining the shape of the gains of the estimation model.

Finally, a strategy using the FEM instead of the FDM for solving the Richards equation and as a basis for the design of an observer-based estimator does not increase the performance of the software-sensor for the unsaturated hydraulic conductivity. However, the predicted suction profiles  $\hat{\psi}_w$  do not suffer anymore from an oscillation problem at unsteady-state. This result is due to the use of  $\hat{\psi}_w$  instead of  $\psi_w$  for solving the observation model, which is independent of the FEM based solution scheme. Future work should then focus on the improvement of the developed observer-based estimator for two parameters.

**TABLE DES MATIÈRES**

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>IV</b>
<b>RÉSUMÉ.....</b>	<b>VI</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>X</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>XIII</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>XVII</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>XVIII</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET DES SYMBOLES .....</b>	<b>XX</b>
<b>LISTE DES ANNEXES.....</b>	<b>XXIII</b>
<b>1 INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Contexte du projet.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Problématique étudiée .....</b>	<b>4</b>
<b>1.3 Hypothèses de recherche et objectifs.....</b>	<b>6</b>



<b>1.4</b>	<b>Contenu et organisation du mémoire .....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>CONCEPTS THÉORIQUES.....</b>	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Description du procédé hydrodynamique.....</b>	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Modélisation d'une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé ....</b>	<b>12</b>
2.2.1	<i>Modèle de Richards.....</i>	13
2.2.2	<i>Conditions initiales et aux limites du problème .....</i>	17
<b>2.3</b>	<b>Contrôle d'une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé .....</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS .....</b>	<b>20</b>
<b>3.1</b>	<b>Revue de littérature.....</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>MEF appliquée à l'équation de Richards .....</b>	<b>24</b>
3.2.1	<i>Discretisation du domaine .....</i>	24
3.2.2	<i>Problème fort .....</i>	26
3.2.3	<i>Formulation variationnelle .....</i>	27
3.2.4	<i>Linéarisation du problème .....</i>	28
3.2.5	<i>Insertion d'un algorithme de point fixe.....</i>	29

3.2.6	<i>Développement de la formulation variationnelle.....</i>	31
3.2.7	<i>Élément de référence et quadrature de Gauss .....</i>	33
3.3	<b>Assemblage des éléments .....</b>	35
4	<b>STRUCTURE DU CAPTEUR-LOGICIEL .....</b>	38
4.1	<b>Structure de l'estimateur/observateur .....</b>	38
4.2	<b>MEF appliquée à l'équation d'observation du modèle.....</b>	45
5	<b>RÉSULTATS ET DISCUSSION .....</b>	49
5.1	<b>Paramètres des relations de van Genuchten-Mualem .....</b>	49
5.2	<b>Résultats de simulations avec la MDF.....</b>	50
5.3	<b>Résultats de simulation avec la MEF .....</b>	52
5.3.1	<i>Effet du pas de temps.....</i>	52
5.3.2	<i>Analogie avec l'équation de convection-dispersion .....</i>	57
5.3.3	<i>Effet de la taille de maille .....</i>	61
5.3.4	<i>Correspondance des résultats de simulation .....</i>	64
5.4	<b>Observation de la succion.....</b>	67

5.4.1	<i>Mesures générées par la résolution du modèle à l'aide de la MEF</i> .....	68
5.4.2	<i>Mesures générées par la résolution du modèle à l'aide de la MDF</i> .....	72
5.4.3	<i>Conclusions</i> .....	76
5.5	<b>Estimation des paramètres du modèle</b> .....	79
6	<b>CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET RECOMMANDATIONS</b> .....	90
6.1	<b>Conclusions</b> .....	90
6.2	<b>Recommandations</b> .....	94
	<b>RÉFÉRENCES</b> .....	97
	<b>ANNEXES</b> .....	105

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 5-1 Paramètres des relations de van Genuchten-Mualem (Schoefs, 2002).....	49
---	----

## LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 Schéma d'un traitement par bioventilation <i>in situ</i> .....	3
Figure 1-2 Méthodologie générale. ....	8
Figure 2-1 Colonne expérimentale pour les tests d'infiltration d'eau.....	11
Figure 3-1 Discrétisation du domaine de calcul.....	25
Figure 3-2 Passage à l'élément de référence.....	33
Figure 5-1 Simulation de l'infiltration avec la MDF (150 nœuds). ....	50
Figure 5-2 Simulation de l'infiltration avec la MEF (150 éléments) : effet du pas de temps. ....	53
Figure 5-3 Durée de l'infiltration en fonction du pas de temps avec la MEF ( $\Delta z = 1$ cm). .....	56
Figure 5-4 Simulation de l'infiltration avec la MEF ( $\Delta t = 0.01$ heure) : effet de la taille de maille.....	62
Figure 5-5 Simulation de l'infiltration avec la MEF (150 éléments et $\Delta t = 0.1$ heure) avec $\psi_w^0 = -50$ cm.....	64
Figure 5-6 Observation de la succion pour $\hat{\psi}_w^{(0)} = -240$ cm (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MEF). ....	69
Figure 5-7 Observation de la succion pour $\Phi = 10^{-4}$ (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MEF). ....	70

Figure 5-8 Observation de la succion pour $\hat{\psi}_w^{(0)} = -240$ cm (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MDF).....	73
Figure 5-9 Observation de la succion pour $\Phi = 10^{-4}$ (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MDF).....	76
Figure 5-10 Observation de la succion avec l'algorithme de Schoefs (2002) pour $\hat{\psi}_w^{(0)} = \psi_w^{(0)} = -250$ cm d'eau. ....	78
Figure 5-11 Estimation de paramètres (mesures provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MEF avec $\psi_w^{(0)} = -250$ cm). ....	81

## LISTE DES SIGLES ET DES SYMBOLES

### Sigles

CI	Conditions initiales
CL	Conditions aux limites
MDF	Méthode des différences finies
MEF	Méthode des éléments finis
MVF	Méthode des volumes finis
SUPG	Formulation « Streamline Upwind/Petrov-Galerkin »

### Symboles

$A_{ij}$	Matrice globale
$B_i$	Membre de droite global
$C_w(\psi_w)$	Capacité capillaire $[(L^3.L^{-3}).L^{-1}]$
$c_G, n_G$ et $w_G$	Coordonnées de Gauss, nombre de points de Gauss et poids de Gauss
$Co_{\Delta t, \Delta z}$	Nombre de Courant local
$D$	Diffusivité du sol $[L^2.T^{-1}]$
$E$	Nombre d'éléments
$H_{\Omega_0}^1$	Espace fonctionnel
$I$	Matrice identité
$J$	Jacobien
$K^e$	Domaine élémentaire

$K_{sat}$	Conductivité hydraulique à saturation [L.T <sup>-1</sup> ]
$K_w(\psi_w)$	Conductivité hydraulique non saturée [L.T <sup>-1</sup> ]
$N$	Nombre de nœuds du maillage
$P$ et $P_w$	Pression de l'air et pression de l'eau [M.L <sup>-1</sup> .T <sup>-2</sup> ]
$Pe_{\Delta z}$	Nombre de Peclet local
$t$	Temps [T]
$v$	Vitesse de l'écoulement (ou de mouillage) [L.T <sup>-1</sup> ]
$v_w$	Vitesse de Darcy [L.T <sup>-1</sup> ]
$z$	Profondeur dans la colonne [L]
$\alpha, m$ et $n$	Paramètres des relations de van Genuchten-Mualem
$\Delta t$	Pas de temps [T]
$\Delta z$	Taille de maille [L]
$\phi$	Charge hydraulique [L]
$\Phi, \Gamma_1$ et $\Gamma_2$	Gains du modèle estimateurs/observateur
$\varphi, \varphi_i$	Fonctions-tests (ou de pondération)
$\varphi_j$	Fonctions de base (ou d'interpolation)
$\lambda$	Valeurs propres
$\theta_e$	Degré de saturation relative [L <sup>3</sup> .L <sup>-3</sup> ]
$\theta_w$	Contenu volumétrique en eau [L <sup>3</sup> .L <sup>-3</sup> ]
$\theta_1, \theta_2$	Paramètres pour l'estimation



$\Omega$	Domaine de résolution
$\xi$	Coordonnée sur l'élément de référence
$\psi_w$	Succion [L]
$\psi_{w,j}$	Inconnues du système global (ou degrés de liberté)

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe 1	Structure et fonctionnement du programme de simulation.....	105
Annexe 2	Structure et fonctionnement du programme estimateurs/observateur. ....	107

## 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte du projet

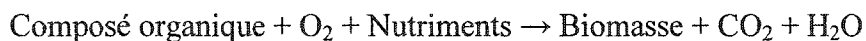
L'expansion industrielle qui caractérise le siècle dernier a laissé sa marque sur l'environnement, la négligence étant trop souvent présente. Depuis que les conséquences de cette pollution industrielle sont mieux connues, un mouvement de conscientisation et de sensibilisation des hautes sphères de l'industrie face au traitement des rejets et des sites contaminés s'est accentué.

À titre d'exemple, les rejets totaux des raffineries enregistrés par l'Inventaire national des rejets polluants d'environnement Canada (INRP) ont continué à diminuer en 2001, et ce malgré une hausse de la production des raffineries (*Rapport sur la performance en matière d'environnement et de sécurité 2001* de l'Institut canadien des produits pétroliers). Toujours selon ce rapport, une baisse de 4% des rejets a été enregistrée par rapport à l'an 2000 et la réduction totale des rejets a été de 60% de 1993 à 2001, et ce malgré l'ajout de 97 nouvelles substances. Ces statistiques montrent bien que l'industrie pétrolière est, d'une part, conscientisée vis-à-vis de la pollution qu'elle engendre, et, d'autre part, soumise à des lois environnementales strictes.

À cet effet, la partie VII de la *Loi fédérale sur les hydrocarbures* (L.R. (1985), ch. 36 (2<sup>e</sup> suppl.)) s'intitule « Fonds pour l'étude de l'environnement ». Ces fonds ont pour objet de financer les études prévues sous le régime de la présente loi ou de toute autre loi fédérale portant sur l'environnement relativement aux activités de prospection, de mise en valeur et de production d'hydrocarbures sur les terres domaniales. En somme, il est fortement encouragé de traiter les sites contaminés dans le domaine pétrolier.

Dans cet ordre d'idées, trois types de techniques ont été mis au point pour le traitement des sols et des eaux contaminés, soit les techniques physico-chimiques, thermiques et biologiques (Nyer, 1992; Boulding, 1995; Suthersan, 1997). Malgré leur grande efficacité, les procédés physico-chimiques et thermiques sont souvent laissés de côté étant donné les coûts élevés associés à leur utilisation. Les procédés biologiques, quant à eux, sont simples et peu coûteux. Cependant, ils sont restreints d'utilisation aux composés biodégradables tels les hydrocarbures.

De fait, le processus de biodégradation est privilégié lorsqu'il est question de dépolluer un sol contaminé par des composés organiques. Il s'agit de la décomposition de ces composés organiques par des micro-organismes selon la réaction suivante :



Les biotraitements sont de deux types, soit *in situ*, sur le site même, sans excavation du sol, ou *ex situ*, après excavation des sols à traiter. Comme les sols contaminés sont souvent très profonds et qu'ils représentent généralement un grand volume d'excavation, les traitements *in situ* (figure 1-1) sont de mise. Le plus souvent, ces traitements sont opérés avec des variables manipulables constantes, c'est-à-dire que les conditions d'opération sont estimées avant le début du traitement et qu'elles sont maintenues constantes pour toute sa durée. En plus de mener à des résultats de décontamination insatisfaisants, ceci entraîne une augmentation de la durée des périodes de traitement et des coûts, d'où le besoin de suivre et de contrôler les procédés *in situ* de biotraitement des sols. Jusqu'à présent, le suivi et le contrôle de ces procédés est limité par la complexité des phénomènes d'interactions entre les micro-organismes et le milieu à traiter ainsi que par le manque d'outils analytiques pour caractériser ces interactions.

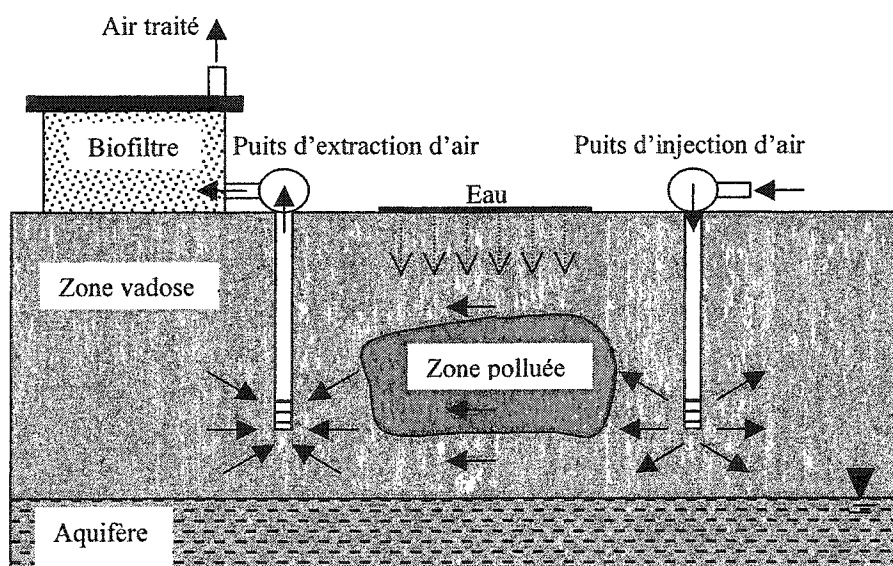


Figure 1-1 Schéma d'un traitement par bioventilation *in situ*.

## 1.2 Problématique étudiée

L'implantation de stratégies de contrôle dans le cas des procédés *in situ* de biodégradation d'un polluant dans un sol poreux non saturé est confrontée, d'une part, à la difficulté de mesurer en ligne certains paramètres et, d'autre part, à la complexité des phénomènes hydrodynamiques et biocinétiques impliqués.

En effet, la mesure en ligne de paramètres typiques d'un sol donné est essentielle pour assurer un contrôle du niveau de pollution dans le dit sol. Par exemple, la conductivité hydraulique non saturée d'un sol décrit la vitesse avec laquelle ce dernier va permettre l'infiltration de l'eau. Cependant, de tels paramètres sont difficiles d'accès *a priori* et sont souvent décrits par des formulations semi-empiriques plus ou moins conviviales.

Par ailleurs, les phénomènes physiques en jeu dans les procédés de biodégradation sont décrits par des modèles phénoménologiques. Ces modèles sont souvent de nature complexe, ce qui rend ardue leur utilisation directe pour suivre la biodégradation d'un polluant.

Aussi de récents travaux proposent-ils le développement de capteurs-logiciels pour suivre en temps réel les procédés de biodégradation dans un milieu poreux non saturé afin de s'affranchir des limitations précédemment exposées. Par définition, un capteur-logiciel est un algorithme qui permet l'estimation en ligne de variables d'états et de

paramètres non mesurables en temps réel, et ce à partir de mesures reliées qui sont plus accessibles (Bastin et Dochain, 1990). Au cours de ses travaux, Schoefs (2002) utilise les modèles phénoménologiques en cause et la structure des estimateurs/observateurs développée par Bastin et Dochain (1990) pour observer des états non mesurés en continu et estimer des paramètres inconnus en temps réel. L'auteur privilégie l'utilisation de la méthode des différences finies (MDF) pour simuler les phénomènes en jeu et pour le développement de capteurs-logiciels basés sur la structure d'estimateurs/observateurs. Cependant, le capteur-logiciel développé pour l'estimation de la conductivité hydraulique non saturée basée sur des mesures en ligne de la succion fait face à des oscillations importantes en régime transitoire.

Dans le but de bien cerner les causes de cette contre-performance, la présente étude porte sur la partie hydrodynamique du procédé de biodégradation d'un polluant dans un sol poreux non saturé. Cette partie comporte deux volets, soit l'écoulement de l'eau et celui de l'air. En effet, tout traitement aérobie nécessite un apport en oxygène afin que la croissance des micro-organismes soit assurée. Par ailleurs, un système d'irrigation doit être considéré, sinon l'humidité du sol inhibera la biodégradation du polluant. Comme le problème se situe au niveau de l'estimation de la conductivité hydraulique non saturée, seule l'infiltration d'eau est considérée dans ce projet. De futures recherches permettront peut-être d'appliquer les concepts élaborés pour un écoulement d'eau dans un sol non saturé à un écoulement d'air et/ou à un écoulement simultané d'air et d'eau dans un tel sol.

### 1.3 Hypothèses de recherche et objectifs

L'hypothèse de recherche de ce projet de maîtrise suggère que la performance du capteur-logiciel pour estimer en temps réel la conductivité hydraulique non saturée lors d'une infiltration d'eau dans un sol poreux, lequel a été développé lors des travaux de doctorat d'Olivier Schoefs (2002), peut être améliorée. Pour ce faire, nous allons utiliser une méthode numérique différente pour simuler les phénomènes en jeu et pour le développement du capteur-logiciel basé sur la structure estimateur/observateur.

Afin de vérifier cette hypothèse, les objectifs suivants sont posés :

- Utiliser la méthode des éléments finis (MEF) plutôt que la MDF pour simuler un écoulement d'eau dans un milieu poreux;
- Modifier le capteur-logiciel afin de l'adapter à la structure de la MEF.

Le phénomène simulé dans ce projet correspond à une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé. L'élément de volume considéré est une colonne cylindrique remplie d'un sol, lequel est assimilé à un milieu poreux non saturé. Les simulations d'un écoulement d'eau dans ce milieu peuvent être effectuées à l'aide de l'une ou l'autre des méthodes de résolution numériques utilisées dans la littérature. Plus particulièrement, la MDF (Haverkamp et al., 1977; Celia et al., 1990; Gottardi et Venutelli, 1993), la MEF (Neuman, 1973; Allen et Murphy, 1986; Letha et Elango, 1994; Thomas et Rees, 1993; El-Kadi et Ling, 1993; Ju et Kung, 1997) et la méthode des volumes finis (MVF)



(Eymard et al., 1999) sont présentes dans la littérature lorsqu'il est question de simuler un écoulement d'eau dans un milieu poreux.

La MEF est une méthode de résolution numérique très utilisée dans l'analyse de plusieurs problèmes en ingénierie. Reconnue pour sa flexibilité, cette méthode permet d'adapter le maillage selon la complexité du domaine de simulation. Aussi, un problème comportant des conditions aux limites complexes peut être plus facilement traité avec la MEF qu'avec la MDF parce que la première méthode permet une imposition naturelle des conditions aux limites. La flexibilité de la MEF fait donc en sorte que cette méthode est privilégiée pour simuler des procédés pour lesquels le domaine de calcul est non régulier ou les conditions aux frontières sont complexes. De plus, la MEF est une méthode qui permet d'adapter facilement le maillage en fonction de la raideur du phénomène à simuler. En effet, si un gradient de température prononcé doit être simulé dans un procédé thermique, la MEF permet de raffiner le maillage localement, c'est-à-dire à la position précise du gradient, afin de mieux approximer le phénomène. Il est à noter que la MDF permet aussi d'adapter un maillage, mais que la MEF permet de le faire de manière plus naturelle. Bref, la flexibilité et l'adaptabilité de la MEF peut mener à une amélioration des résultats de simulation obtenus à l'aide de la MDF.

Par ailleurs, le capteur-logiciel construit par Schoefs (2002) pour estimer en temps réel la conductivité hydraulique non saturée doit être modifié si la MEF remplace la MDF comme méthode de résolution numérique. Cette modification entraîne des différences

notables dans, notamment, la nature des paramètres à estimer. Comme le capteur-logiciel est basé sur la structure d'estimateur/observateur, nous utiliserons souvent l'expression « modèle d'estimateur/observateur » dans le développement. Finalement, l'observation des états non mesurés et l'estimation de la conductivité hydraulique non saturée sans les oscillations rencontrées par Schoefs (2002) en régime transitoire seront tentées.

La figure 1-2 illustre schématiquement cette méthodologie générale.

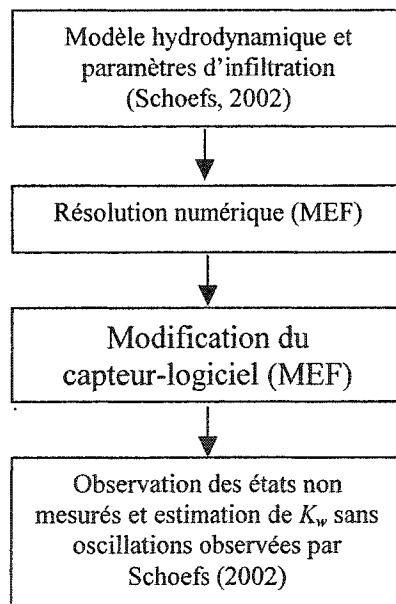


Figure 1-2 Méthodologie générale.

#### **1.4 Contenu et organisation du mémoire**

Le présent mémoire se divise en quatre parties. D'abord, le chapitre 2 présente les concepts théoriques relatifs au projet. Les techniques de modélisation, de suivi et de contrôle relatives à l'infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé y sont présentées. Ensuite, la MEF est appliquée à l'équation de modélisation dans le chapitre 3. Le chapitre 4 introduit quant à lui l'observation des états non mesurés et l'estimation en temps réel de la conductivité hydraulique non saturée. Finalement, les résultats de simulation sont présentés et analysés dans le chapitre 5.

## 2 CONCEPTS THÉORIQUES

Ce chapitre se divise en trois sections et il correspond à une revue de littérature sur les concepts théoriques relatifs au projet. D'abord, le procédé expérimental d'infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé tel qu'utilisé par Schoefs (2002) est décrit. Ensuite, le modèle décrivant le phénomène étudié est présenté. Finalement, les techniques de contrôle et de suivi d'une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé utilisées à ce jour sont introduites.

### 2.1 Description du procédé hydrodynamique

Le cadre de l'étude est défini comme un élément de volume dans lequel de l'eau s'infiltre. Techniquement, l'infiltration d'eau se produit dans une colonne expérimentale telle que présentée à la figure 2-1. Les détails expérimentaux sont présentés dans la section *Matériels et méthodes* de la thèse d'Olivier Schoefs (2002). Il importe de noter que ce mémoire ne comporte pas de partie expérimentale. Aussi les simulations numériques effectuées dans ce projet utilisent-elles les constantes déterminées par Schoefs (2002) lors des études hydrodynamiques relatives à ses travaux de doctorat.

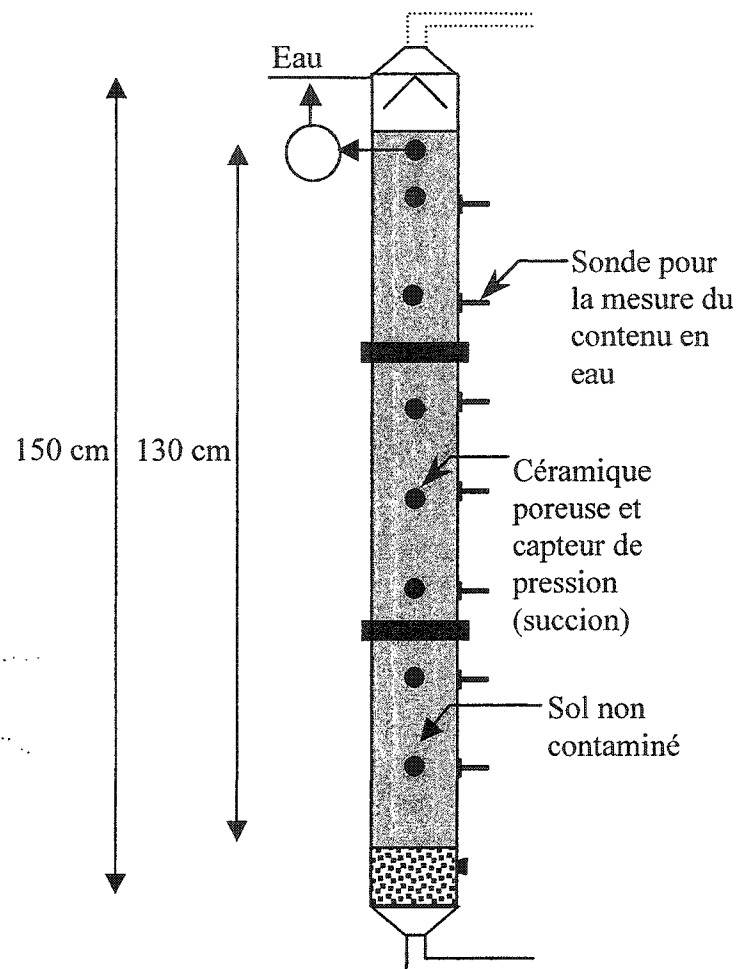


Figure 2-1 Colonne expérimentale pour les tests d'infiltration d'eau.

La caractérisation de l'écoulement d'eau est effectuée à l'aide de la mesure de pression d'eau ou de suction ( $\psi_w$ ). Dans un sol saturé, la pression d'eau correspond à une grandeur positive, soit la hauteur d'eau au-dessus du point de mesure. Par contre, la pression d'eau dans un sol non saturé représente une grandeur négative, car l'eau y est soumise à une pression négative par rapport à la pression de l'air. Cette pression

négative, ou succion, est attribuable à la tension superficielle entre l'air et l'eau. Dans le montage utilisé par Schoefs (2002), la mesure de la succion  $\psi_w$  est réalisée par des tensiomètres qui quantifient la force de pression avec laquelle l'eau est retenue dans le sol.

## **2.2 Modélisation d'une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé**

Dans la littérature, la modélisation hydrodynamique décrivant une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé est le plus souvent décrite par l'équation de Richards (1931), laquelle se base sur une généralisation de la loi de Darcy et sur des relations semi-empiriques prédisant la conductivité hydraulique non saturée et autres paramètres d'infiltration (van Genuchten, 1980; Mualem, 1986). La plupart des auteurs utilisent en effet l'équation de Richards lorsque vient le temps de simuler un écoulement d'eau à travers un milieu poreux (Haverkamp et al., 1977; Ju et Kung, 1997; van Dam et Feddes, 2000; Jacques et al., 2002; Schoefs, 2002). Selon ces auteurs, le modèle de Richards permet de décrire de façon satisfaisante la percolation d'eau dans un sol non saturé.

### 2.2.1 *Modèle de Richards*

Le système à modéliser consiste en un écoulement d'eau à travers un milieu poreux non saturé sous certaines conditions de pression et de succion. Le milieu poreux étudié est un sol et les hypothèses suivantes sont posées :

- le sol est assimilé à un milieu indéformable, homogène et isotrope;
- l'écoulement de l'eau est incompressible, unidirectionnel vertical et isotherme;
- le phénomène d'évaporation est négligé.

En considérant l'hypothèse d'incompressibilité de l'eau dans l'équation de continuité, nous obtenons

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = -\nabla \cdot v_w \quad (2.1)$$

où  $\theta_w$  est la teneur en eau volumique ( $\text{m}^3/\text{m}^3$ ) et  $v_w$  est la vitesse ou le flux de Darcy (m/s). Dans un milieu poreux non saturé, la loi de Darcy s'écrit de la façon suivante :

$$q_w = -K_w(\theta_w) \cdot \nabla \phi \quad (2.2)$$

où  $\phi$  est la charge hydraulique (m),  $K_w(\theta_w)$  est le tenseur des conductivités hydrauliques (m/s) et  $q_w$  est analogue à  $v_w$ . Ces deux équations combinées mènent à la relation suivante :

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \nabla \cdot (K_w(\theta_w) \cdot \nabla \phi) \quad (2.3)$$

Pour un écoulement unidirectionnel vertical, la charge hydraulique  $\phi$  est définie par

$$\phi = \psi - z \quad (2.4)$$

où  $\psi$  est la charge de pression, laquelle est équivalente à la succion dans un milieu non saturé, et  $z$  est la cote prise positivement vers le bas à partir de la surface du sol.

L'équation (2.3) devient alors

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\theta_w) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.5)$$

où  $\psi = \frac{P_w - P}{\gamma_w}$  avec  $\gamma_w = \rho_w g$  = poids volumique de l'eau ( $\text{kg/m}^2\text{s}^2$ ).  $P_w$  est la pression

de l'eau prise négativement et  $P$  est la pression de l'air prise positivement. Si la pression

atmosphérique est prise comme référence, alors  $P=0$  et on a  $\psi = \frac{P_w - P}{\gamma_w} = \frac{P_w}{\gamma_w} = \psi_w$ .



Alors en considérant la pression atmosphérique comme référence dans l'expression de la succion dans un milieu non saturé, l'équation (2.5) prend la forme suivante :

$$C_w(\psi_w) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\theta_w) \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.6)$$

Il s'agit de l'équation de Richards dans laquelle les fonctions  $C_w(\psi_w)$  et  $K_w(\theta_w)$  peuvent être identifiées à partir de tests de rétention d'eau et de modèles de régression. L'équation différentielle partielle parabolique présentée en (2.6) est fortement non linéaire en  $\psi_w$ .

La capacité capillaire  $C_w(\psi_w)$  est définie par

$$C_w(\psi_w) = \frac{d\theta_w}{d\psi_w} \quad (2.7)$$

et  $K_w(\theta_w)$  représente la conductivité hydraulique non saturée. Van Genuchten (1980) a proposé les formulations semi-empiriques suivantes :

$$\theta_e = \left[ \frac{1}{1 + |\alpha \psi_w|^n} \right]^m \quad (2.8)$$

où  $\alpha$ ,  $m$ ,  $n$  sont des constantes ( $m$  étant relié à  $n$  par la relation  $m = 1 - \frac{1}{n}$  (van Genuchten, 1980)). Le degré de saturation relative  $\theta_e$  est défini de la façon suivante :

$$\theta_e = \frac{\theta_w - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.9)$$

où  $\theta_r$  est la teneur en eau résiduelle et  $\theta_s$  est la teneur en eau à saturation. En combinant (2.8) et (2.9), on obtient l'expression suivante pour  $C_w(\psi_w)$  :

$$C_w(\psi_w) = \frac{d\theta_w}{d\psi_w} = -\text{signe}(\psi_w)(\theta_s - \theta_r) \frac{\alpha m n |\alpha \psi_w|^{n-1}}{(1 + |\alpha \psi_w|^n)^{m+1}} \quad (2.10)$$

La conductivité hydraulique non saturée s'écrit quant à elle

$$K_w(\theta_w) = K_w(\psi_w) = K_{sat} \sqrt{\theta_e} \left[ 1 - \left( 1 - \theta_e^{1/m} \right)^m \right]^2 \quad (2.11)$$

où  $K_{sat}$  est la conductivité hydraulique à saturation. Les formulations (2.8), (2.10) et (2.11) sont les relations de van Genuchten-Mualem.

### 2.2.2 Conditions initiales et aux limites du problème

Comme l'équation (2.6) est du premier ordre dans le temps et du deuxième ordre dans l'espace, sa résolution implique une condition initiale et deux conditions aux limites. Les conditions utilisées ici sont les mêmes que celles utilisées par Schoefs (2002), soit une humidité du sol uniforme dans la colonne au départ (succions égales au temps zéro), une succion de consigne maintenue constante en tête de colonne et un flux d'eau nul quand  $z$  tend vers l'infini (dans les simulations, l'infini est considéré comme étant à 150 centimètres de la surface du sol). Le domaine de l'infiltration est donc défini par  $\Omega = [0, L] = [0, 150 \text{ cm}]$ .

Ainsi les conditions initiales et aux limites s'écrivent-elles de la façon suivante :

$$CI: \psi_w(0, z) = \psi_w^0(z) \text{ connues} \quad (2.12)$$

$$CL: \psi_w(t, 0) = \psi_w^c \text{ fixée et } \frac{\partial \psi_w}{\partial z}(t, 150) = 0 \quad (2.13)$$

## 2.3 Contrôle d'une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé

La description des procédés hydrologiques est souvent complexifiée par la grande plage d'échelles auxquelles les procédés d'intérêt peuvent opérer et par la non uniformité des mesures recueillies pour un milieu donné. Dans le cas d'une infiltration d'eau dans un

milieu non saturé, ce problème est flagrant parce que les mesures de la conductivité hydraulique non saturée sont généralement faites en un point spécifique alors qu'elles peuvent varier considérablement d'un point à un autre dans le milieu d'intérêt (Nielsen et al., 1973). De plus, la détermination de ce paramètre à partir d'expériences en laboratoire et de mesures sur le terrain implique une grande incertitude, beaucoup de temps pour la collecte de données et pour l'analyse de ces dernières (Ghidaoui et Prasad, 2000). Par conséquent, plusieurs méthodes pour estimer les propriétés hydrauliques d'un sol ont été développées (particulièrement pour la conductivité hydraulique non saturée). Parmi les plus souvent utilisées figure la méthode inverse (Zachmann et al., 1981; Ross et Parlange, 1994; Lehmann et Ackerer, 1997; Bitterlich et Knabner, 2002), laquelle consiste en une procédure d'optimisation non linéaire. Les paramètres qui caractérisent les propriétés hydrauliques sont alors estimés en minimisant une certaine fonction objectif.

Par ailleurs, la conductivité hydraulique non saturée d'un sol varie dans le temps et elle est fonction des caractéristiques physiques du sol considéré. Le contrôle d'une infiltration d'eau dans un sol non saturé passant par le suivi de sa conductivité hydraulique, il importe donc d'obtenir une estimation en temps réel de ce paramètre. Comme il est difficilement mesurable en ligne, il faut tenter de l'estimer à partir de mesures plus facilement accessibles telle la succion  $\psi_w$ . Pour ce faire, des capteurs-logiciels sont conçus afin d'ajuster le modèle en temps réel en fonction des conditions d'opération *in situ*. On parle dès lors de la théorie des systèmes adaptatifs. Ainsi un

algorithme de contrôle robuste basé sur la théorie des systèmes adaptatifs permettrait-il de suivre en temps réel un écoulement d'eau dans différents sols, et ce par un simple changement des conditions d'opération à l'intérieur de l'algorithme. De plus, le fait d'estimer la conductivité hydraulique non saturée d'un sol avec cette théorie permet de s'affranchir de l'utilisation de formulations empiriques, lesquelles peuvent être plus ou moins adéquates dans certaines situations. Le contrôle par la théorie des systèmes adaptatifs est utilisé dans plusieurs domaines, notamment dans les procédés environnementaux (Perrier et Dochain, 1993; Mangold et al., 1994; Schoefs et al., 2003) et dans les procédés de culture de cellules (Pomerleau, 1990; Nihtilä et al., 1997; Perrier et al., 2000; Dochain, 2001). Dans ces différentes applications, des capteurs-logiciels ont permis l'observation d'états non mesurés telle la densité partielle de pores et l'estimation en temps réel de paramètres inconnus comme la vitesse de migration d'un pic d'adsorption. Cependant, à notre connaissance, seul Schoefs applique dans ses travaux la théorie des systèmes adaptatifs au domaine de l'infiltration d'eau dans les sols.

### 3 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

La MEF est un outil de résolution numérique dont l'utilisation est fréquente en ingénierie. En effet, les équations différentielles décrivant les modèles physiques ne peuvent généralement pas être résolues analytiquement, d'où l'intérêt de la modélisation numérique. Dans le cas d'un problème dont on connaît le modèle mathématique (système d'équations aux dérivées partielles et conditions aux limites) mais dont la géométrie est complexe, la MEF est privilégiée par rapport à la MDF pour obtenir une approximation de la solution exacte du problème. De fait, la MEF est une méthode plus facilement adaptable et plus flexible que la MDF; elle permet de raffiner localement ou globalement le maillage du domaine de résolution, et ce peu importe la géométrie du problème. De plus, elle permet une imposition naturelle des conditions aux limites du problème, et ce même si ces dernières sont de nature complexe.

La MEF utilise une base polynomiale pour approcher les variables du problème. Plus particulièrement, le domaine de calcul est décomposé en éléments, puis des polynômes sont utilisés pour approximer la solution d'une forme variationnelle de l'équation différentielle partielle considérée, et ce sur chaque élément du domaine. Après l'assemblage des composantes élémentaires, on obtient un système linéaire global sous forme matricielle. La résolution de ce système permet l'obtention d'une approximation de la solution du modèle.

La MEF est une méthode de résidus pondérés qui implique un choix judicieux de fonctions-tests (ou de pondération) et de fonctions de base (ou d'interpolation) (Bertrand, 2002). La formulation de Galerkin, laquelle utilise des fonctions-tests et des fonctions de base issues de la même classe de fonctions, est privilégiée dans ce mémoire.

### **3.1 Revue de littérature**

Dans la littérature, plusieurs auteurs utilisent la MEF pour résoudre numériquement l'équation de Richards. La méthodologie la plus souvent retrouvée consiste en l'utilisation de la MEF pour le domaine spatial (interpolation linéaire et/ou quadratique) et d'un schéma d'Euler implicite pour le domaine temporel. Cette méthode est combinée à certaines variantes selon les auteurs : diagonalisation de la matrice masse ou « lumping » (Milly, 1985; Celia et al., 1990; Ju et Kung, 1997), méthode des sous-domaines (Cooley, 1983) ou méthode de collocation avec des fonctions d'interpolation hermitienne cubiques (Allen et Murphy, 1986).

Il est conventionnellement accepté qu'un schéma consistant de la matrice masse combiné à l'utilisation d'éléments d'ordre supérieur (éléments quadratiques par exemple) mène à de meilleurs résultats lorsque vient le temps de simuler numériquement des problèmes non linéaires complexes. Cependant, plusieurs études démontrent que

l'utilisation de la MEF dans ces conditions pour résoudre l'équation de Richards cause des problèmes d'oscillations numériques (Neumann, 1973; Cooley, 1983; Milly, 1985; Celia et al., 1990). La présence de ces oscillations peut entraîner la divergence lorsque l'équation de Richards est utilisée pour simuler un front d'eau s'infiltrant dans un sol très sec. Pour s'affranchir de ce problème, il est nécessaire de réduire le pas de temps et la taille de maille (Ju et Kung, 1997). Cependant, ces réductions entraînent une augmentation importante du temps de calcul de l'ordinateur et rendent l'utilisation de la MEF moins attrayante. Il est donc suggéré par Ju et Kung (1997) d'utiliser des éléments linéaires plutôt que des éléments quadratiques, bien que plus précis en théorie, pour résoudre numériquement l'équation de Richards à l'aide de la MEF.

Par ailleurs, Celia et al. (1987) et Milly (1988) ont rencontré des problème au niveau de la conservation de la masse lors de la résolution de la forme- $\psi$  (« pressure-based form ») de l'équation de Richards. En analysant la précision des solutions numériques obtenues par la MEF pour les différentes formes de l'équation de Richards<sup>1</sup>, il a été conclu par Celia et al. (1990) que la solution obtenue pour la forme- $\psi$  ne conserve la masse que faiblement.

---

<sup>1</sup> Il existe trois forme de l'équation de Richards : la forme- $\psi$  ou « pressure-based », la forme- $\theta$  ou « theta-based » et la forme mixte (Celia et al, 1990).



Dans le but de pallier à cette lacune, El-Kadi et Ling (1993) proposent une modification de la forme- $\psi$  de l'équation de Richards par la transformation de Kirchhoff. Le problème résultant n'est autre qu'une forme non linéaire d'une équation de transport classique. Ainsi les auteurs utilisent-ils la similarité entre l'équation de Richards transformée et l'équation de convection-diffusion pour dégager un nombre de Peclet et un nombre de Courant propres à l'équation de Richards. Ces nombres adimensionnels sont ensuite utilisés comme critères pour déterminer le pas de temps et la taille de maille du schéma de résolution. Cependant, les résultats de simulations numériques de la forme transformée de l'équation de Richards souffrent des mêmes problèmes que ceux rencontrés lors de la résolution de la forme- $\psi$  (sensibilité à la taille de maille, au pas de temps et aux conditions hydrauliques contrôlant l'infiltration). Selon les auteurs, il est donc clair que ces imprécisions numériques sont imputables aux propriétés hydrauliques du sol, aux conditions qui contrôlent l'infiltration et au schéma de discrétisation utilisé plutôt qu'à la forme de l'équation utilisée.

Il ressort donc que plusieurs auteurs ont résolu avec succès l'équation de Richards en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale et un schéma discret quelconque pour le domaine temporel (Celia et al. (1990), Ju et Kung (1997) et El-Kadi et Ling (1993) entre autres). Cependant, ces différentes publications font état de difficultés numériques inhérentes à l'utilisation de cette stratégie de résolution. En particulier, l'utilisation d'éléments finis quadratiques est déconseillée parce qu'elle peut

entraîner la divergence des résultats si le sol est très sec au départ, comme c'est le cas dans notre étude.

Donc, considérant la nature du problème et les contraintes exposées quant à l'utilisation d'éléments quadratiques pour résoudre l'équation de Richards, la MEF avec des éléments unidimensionnels linéaires est utilisée dans ce mémoire pour le schéma spatial. Le schéma temporel, quant à lui, correspond à une discrétisation d'Euler implicite. Inconditionnellement stable, ce schéma en temps est le plus utilisé pour résoudre l'équation de Richards dans la littérature. De plus, la forme- $\psi$  de l'équation de Richards est privilégiée. Bien que le développement mathématique présenté à la prochaine section ne s'appuie pas sur une référence en particulier, il n'introduit pas de nouveaux aspects théoriques au niveau de l'application de la MEF à l'équation de Richards.

### **3.2 MEF appliquée à l'équation de Richards**

#### *3.2.1 Discrétisation du domaine*

Tel que mentionné dans les concepts théoriques, l'infiltration d'eau est assimilée à un écoulement unidirectionnel vertical. Ainsi la colonne d'infiltration, laquelle constitue le domaine de résolution, peut-elle être assimilée à un segment de droite de longueur  $L$ . Le

problème correspond donc à un écoulement selon l'axe des coordonnées  $z$  pour lequel la partition du domaine est effectuée sur un intervalle  $\Omega = [0, L]$ . Afin de simplifier la formulation du problème, des éléments finis de tailles identiques sont choisis. On parle alors d'un maillage uniforme. La figure suivante illustre la discrétisation du maillage.

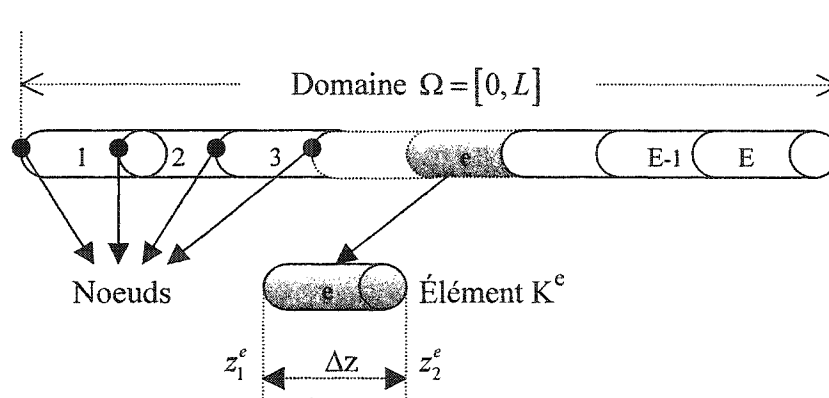


Figure 3-1 Discrétisation du domaine de calcul.

Pour un maillage uniforme constitué d'un nombre  $E$  d'éléments, la taille  $\Delta z$  de chaque élément du maillage est donnée par  $\Delta z = L/E$ . L'utilisation d'éléments finis linéaires implique qu'il y a 2 nœuds de calcul (ou d'interpolation) par élément. Comme nous considérons un problème dont la géométrie est unidimensionnelle et que l'interpolation est linéaire, le nombre de nœuds globaux  $N$  est donné par la relation  $N = E + 1$ . Chaque élément est représenté par un sous-segment  $[z_1^e, z_2^e]$ .

Le choix du maillage est très important dans l'analyse par la MEF. De fait, la précision de la solution d'approximation dépend du nombre et du type d'éléments considérés dans

le maillage. Plus le nombre d'éléments  $E$  est élevé, plus la solution d'approximation se rapproche de la solution exacte du problème. Par contre, l'effet du type d'éléments choisi n'est pas étudié : nous nous restreignons à l'utilisation d'éléments linéaires.

### 3.2.2 Problème fort

La formulation forte correspond à l'équation de Richards présentée en (2.6) combinée aux conditions initiales et aux limites du problème ((2.12) et (2.13)). Ainsi a-t-on le problème fort suivant sur le domaine  $\Omega = [0, L]$  où  $L$  représente la hauteur de la colonne prise positivement vers le bas :

$$\left. \begin{aligned} C(\psi_w) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\psi_w) \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \\ CI: \psi_w(0, z) &= \psi_w^0(z) \text{ connues} \\ CL: \psi_w(t, 0) &= \psi_w^c \text{ fixée et } \frac{\partial \psi_w}{\partial z}(t, 150) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

La condition en tête de colonne ( $z=0$ ) est de type Dirichlet non homogène alors que la condition en bas de colonne ( $z=150 \text{ cm}$ ) est une condition de Neumann homogène.

### 3.2.3 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle (ou faible) de l'équation de Richards est obtenue par la multiplication de l'équation différentielle partielle en (3.1) par une fonction-test  $\varphi$ , puis par l'utilisation de la formule de Green. L'expression suivante est alors obtenue :

$$\int_{\Omega} C_w(\psi_w) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\psi_w) \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \cdot \varphi \, d\Omega \quad (3.2)$$

$$\forall \varphi \in H_{\Omega_o}^1(\Omega) \text{ avec } H_{\Omega_o}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi(0) = 0 \right\}.$$

Dans cette formulation, les fonctions-tests sont représentées par  $\varphi$  et  $H_{\Omega_o}^1(\Omega)$  est l'espace fonctionnel auquel appartiennent ces fonctions.  $\Omega_o$  correspond au haut de la colonne, soit à la position  $z=0$  où une condition de Dirichlet est imposée. L'espace  $H_{\Omega_o}^1(\Omega)$  est donc choisi étant donné la nature des conditions aux frontières du problème (pour plus de détails, voir Fortin et Garon (2000)). Comme la condition en tête de colonne est une condition de Dirichlet non homogène, une fonction de relèvement qui satisfait les conditions aux limites (CL) doit être utilisée. En effet, le relèvement consiste en un changement de variable qui permet de transformer un problème avec des CL non homogènes en un problème dont les CL sont homogènes. Dans le but de simplifier le développement mathématique qui suit, la fonction de relèvement est

volontairement omise. Elle est plutôt considérée au niveau de l'assemblage des éléments (section 3.6).

### 3.2.4 Linéarisation du problème

En utilisant un schéma d'Euler implicite pour le temps et en considérant le  $K_w(\psi_w)$  et le  $C_w(\psi_w)$  du temps précédent, l'équation (2.6) devient

$$C_w(\psi_w^{(t)})\psi_w^{(t+1)} - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\psi_w^{(t)}) \left( \frac{\partial \psi_w^{(t+1)}}{\partial z} - 1 \right) \right] = C_w(\psi_w^{(t)})\psi_w^{(t)} \quad (3.3)$$

Cette équation différentielle partielle est linéaire en  $\psi_w^{(t+1)}$ .

L'algorithme de résolution suivant est alors appliqué pour trouver la solution numérique en régime permanent:

0.  $t = 0$ ,  $\psi_w^{(0)}$  est donnée;
1. Pour  $t = 1, 2, 3, \dots$  jusqu'à convergence (norme de  $R$  suffisamment petite),
  - 1.1 Résoudre (3.3) à l'aide de la MEF avec  $\psi_w^{(t)}$  connue;
  - 1.2 Si  $R = |\psi_w^{(t+1)} - \psi_w^{(t)}| > \text{tolérance}$ , aller à 1.

En utilisant un pas de temps suffisamment petit, ce problème nous mène à  $\psi_w^{(t+1)} = \psi_w^{(t)}$ . Ainsi résout-on un système linéaire à chaque pas de temps. La formulation faible présentée en (3.2) devient donc

$$\int_{\Omega} \left[ C_w^{(t)} \psi_w^{(t+1)} - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w^{(t)} \left( \frac{\partial \psi_w^{(t+1)}}{\partial z} - 1 \right) \right] - C_w^{(t)} \psi_w^{(t)} \right] \cdot \varphi \, d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

avec  $K_w^{(t)} = K_w(\psi_w^{(t)})$  et  $C_w^{(t)} = C_w(\psi_w^{(t)})$ .

### 3.2.5 Insertion d'un algorithme de point fixe

L'équation (3.4) implique l'utilisation des paramètres de la conductivité hydraulique non saturée  $K_w^{(t)}$  et de la capacité capillaire  $C_w^{(t)}$  évalués à l'itération en temps précédente pour obtenir les suctions au temps courant  $\psi_w^{(t+1)}$ . Si le pas de temps est trop élevé, ceci introduit un non sens physique qui peut faire en sorte que l'algorithme diverge complètement. Par exemple, si on essaie d'estimer la suction au temps courant  $\psi_w^{(t+1)}$  en utilisant la conductivité hydraulique non saturée calculée à partir de la suction  $\psi_w^{(t)}$  déterminée 10 minutes plus tôt, il est fort possible que cela perturbe l'algorithme de résolution, car la conductivité hydraulique non saturée varie beaucoup dans le temps. Une façon de pallier ce problème consiste en l'utilisation d'un algorithme de point fixe à

l'intérieur de la boucle de résolution. Ainsi la succion au temps courant  $\psi_w^{(t+1)}$  est-elle évaluée en considérant la conductivité hydraulique évaluée au temps courant  $K_w(\psi_w^{(t+1)})$  plutôt que la conductivité hydraulique évaluée au temps précédent  $K_w(\psi_w^{(t)})$ .

Soit  $\psi_w^{(t),(p)}$ , une succion où  $t$  représente l'itération en temps et  $p$  l'itération de point fixe.

0.  $\psi_w^{(0)}$  = condition initiale,

1. Pour  $t = 0, 1, 2, \dots$  jusqu'à la fin de la simulation,

1.1  $\psi_w^{(t+1),(0)} = \psi_w^{(t)}$

1.2 Pour  $p = 0, 1, 2, \dots$  jusqu'à convergence (norme de  $R_{PF}$  suffisamment petite),

1.2.1 Résoudre à l'aide de la MEF

$$C(\psi_w^{(t+1),(p)})\psi_w^{(t+1),(p+1)} - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\psi_w^{(t+1),(p)}) \left( \frac{\partial \psi_w^{(t+1),(p+1)}}{\partial z} - 1 \right) \right] = C(\psi_w^{(t+1),(p)})\psi_w^{(t)}$$

1.2.2 Si  $R_{PF} = |\psi_w^{(t+1),(p+1)} - \psi_w^{(t+1),(p)}| > \text{tolérance}_{PF}$ , aller à 1.2.

1.3  $\psi_w^{(t+1)} = \psi_w^{(t+1),(p+1)}$

1.4 Si  $R = |\psi_w^{(t+1)} - \psi_w^{(t)}| > \text{tolérance}$ , aller à 1.

Par souci de clarté et de concision, l'indice  $p$  de l'itération de point fixe est omis dans les développements qui suivent.



### 3.2.6 Développement de la formulation variationnelle

L'intégration par partie de la dérivée partielle d'ordre deux de la forme faible de l'équation de Richards mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_w^{(t+1)} \varphi \psi_w^{(t+1)} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} K_w^{(t+1)} \left( \frac{\partial \psi_w^{(t+1)}}{\partial z} - 1 \right) d\Omega = \\ \int_{\Omega} C_w^{(t+1)} \varphi \psi_w^{(t)} d\Omega + \Delta t \left[ \varphi K_w^{(t+1)} \left( \frac{\partial \psi_w^{(t+1)}}{\partial z} - 1 \right) \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'utilisation des conditions aux frontières présentées en (3.1) dans cette équation conduit à l'expression

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_w^{(t+1)} \varphi \psi_w^{(t+1)} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} K_w^{(t+1)} \left( \frac{\partial \psi_w^{(t+1)}}{\partial z} - 1 \right) d\Omega = \\ \int_{\Omega} C_w^{(t+1)} \varphi \psi_w^{(t)} d\Omega - \underbrace{\Delta t \left( \varphi K_w^{(t+1)} \right)_{z=L}}_{\text{Terme de bord}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

car  $\frac{\partial \psi_w}{\partial z}(z = L = 150) = 0$  et  $\varphi(z = 0) = 0$ .

Au niveau élémentaire, la formulation variationnelle ne fait plus intervenir le terme de bord, car ce dernier est une variable secondaire qui sera considérée après l'assemblage des éléments (section 3.3).

En utilisant la notation

$$\psi_w^{(t+1)} \Big|_{\Omega} = \sum_{j=1}^N \psi_{w,j}^{(t+1)} \varphi_j \quad (3.7)$$

où les fonctions  $\varphi_j$  sont les fonctions d'interpolation globales de Galerkin et comme

$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{\text{éléments}}} K^e$ , on obtient la formulation variationnelle qui suit :

$$\sum_{j=1}^N \psi_{w,j}^{(t+1)} \left[ \sum_{e=1}^{N_{\text{éléments}}} \left( \int_{K^e} C_w^{(t+1)} \varphi_i \varphi_j dz + \Delta t \int_{K^e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} K_w^{(t+1)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dz \right) \right] = \sum_{e=1}^{N_{\text{éléments}}} \left( \int_{K^e} C_w^{(t+1)} \varphi_i \psi_w^{(t)} dz + \Delta t \int_{K^e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} K_w^{(t+1)} dz \right) \quad (3.8)$$

$\forall \varphi_i \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  et  $i = 1, 2, \dots, N$  avec  $N$  = nombre de nœuds du maillage et

$N_{\text{éléments}} = E$ , le nombre d'éléments considérés sur le domaine de résolution. Les

inconnues du problème sont les  $\psi_{w,j}^{(t+1)}$ . L'équation (3.8) fait donc intervenir des

intégrales élémentaires qu'il nous faut évaluer.

Ces termes élémentaires sont donnés par

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(e)} &= \int_{K^e} C_w^{(t+1)} \varphi_i \varphi_j dz + \Delta t \int_{K^e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} K_w^{(t+1)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dz \\ b_i^{(e)} &= \int_{K^e} C_w^{(t+1)} \varphi_i \psi_w^{(t)} dz + \Delta t \int_{K^e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} K_w^{(t+1)} dz \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

### 3.2.7 Élément de référence et quadrature de Gauss

En pratique, il est préférable d'effectuer un changement de variable qui permet le passage de l'élément réel à l'élément de référence. La figure 3-2 illustre ce passage.

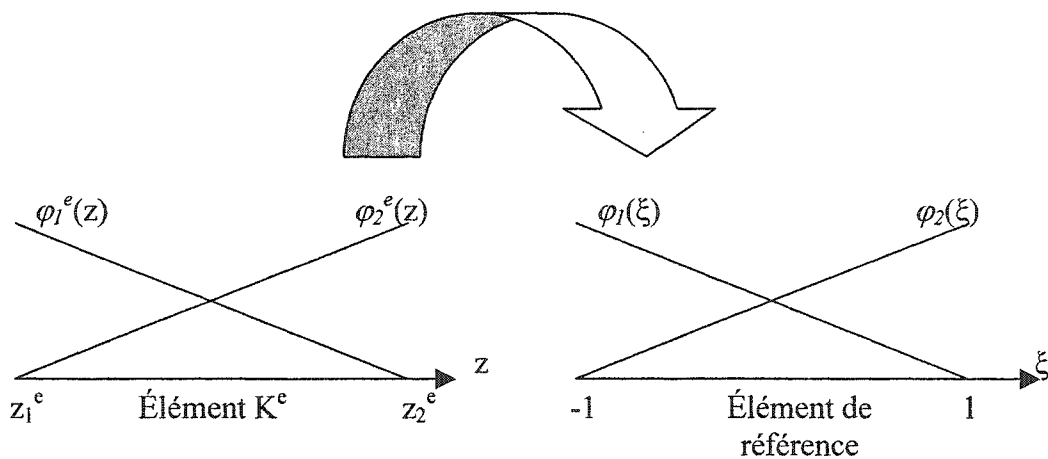


Figure 3-2 Passage à l'élément de référence.

Sur la figure 3-2, les fonctions  $\varphi_I^e(z)$  et  $\varphi_2^e(z)$  sont les restrictions sur l'élément  $K^e$  de la fonction globale  $\varphi_i(z)$ . En utilisant l'élément de référence plutôt que l'élément réel, on s'assure que les fonctions d'interpolation sont indépendantes des éléments réels. De cette manière, on a un seul ensemble de fonctions à construire. Pour de plus amples détails, veuillez vous référer à Fortin et Garon (2000). Le jacobien de la transformation est donné par l'expression  $J = \frac{dz}{d\xi}$ .

Les termes élémentaires prennent donc l'allure suivante :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(e)} &= \int_{-1}^1 C_w^{(t+1)} \varphi_i \varphi_j J d\xi + \Delta t \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} K_w^{(t+1)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} J d\xi \\ b_i^{(e)} &= \int_{-1}^1 C_w^{(t+1)} \varphi_i \psi_w^{(t)} J d\xi + \Delta t \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} K_w^{(t+1)} J d\xi \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comme  $\frac{d\xi}{dz} = J^{-1}$ , on obtient les expressions

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(e)} &= \int_{-1}^1 C_w^{(t+1)} \varphi_i \varphi_j J d\xi + \Delta t \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} K_w^{(t+1)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} J^{-1} d\xi \\ b_i^{(e)} &= \int_{-1}^1 C_w^{(t+1)} \varphi_i \psi_w^{(t)} J d\xi + \Delta t \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} K_w^{(t+1)} d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il importe ensuite d'intégrer numériquement les termes élémentaires à l'aide d'une méthode d'intégration numérique. L'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(e)} &= \sum_{k=1}^{n_G} w_G \left[ C_w^{(i+1)}(c_G) \varphi_i(c_G) \varphi_j(c_G) J(c_G) + \Delta t \frac{\partial \varphi_i(c_G)}{\partial \xi} K_w^{(i+1)}(c_G) \frac{\partial \varphi_j(c_G)}{\partial \xi} J^{-1}(c_G) \right] \\ b_i^{(e)} &= \sum_{k=1}^{n_G} w_G \left[ C_w^{(i+1)}(c_G) \varphi_i(c_G) \psi_w^{(i)}(c_G) J(c_G) + \Delta t \frac{\partial \varphi_i(c_G)}{\partial \xi} K_w^{(i+1)}(c_G) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $n_G$  : nombre de points de Gauss,  $w_G$  : poids de Gauss et  $c_G$  : nœuds de Gauss.

### 3.3 Assemblage des éléments

À partir du système de matrices et de vecteurs définis sur un élément quelconque du maillage, le système global est construit par la réunion des nœuds des éléments. Cette étape consiste en un regroupement des matrices et des membres de droite élémentaires selon l'équation (3.8). C'est à cette étape que le relèvement est effectué afin de considérer la CL de Dirichlet non homogène en tête de colonne. On obtient ainsi un système linéaire global dont la solution correspond aux degrés de liberté  $\psi_{w,j}^{(i+1)}$  qui permettent d'interpoler la solution et dont la valeur n'est autre que la succion aux nœuds. À l'étape de l'assemblage, il n'est plus question de fonctions-tests et de fonctions de base globales  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$ , mais plutôt de fonctions-tests et de fonctions de

base locales qui sont en fait des restrictions des fonctions globales à chacun des éléments finis. Comme cette notion est bien expliquée dans certaines références et comme notre étude ne nécessite pas un approfondissement de ce concept, nous renvoyons le lecteur à Bertrand (2002) et à Fortin et Garon (2000) pour plus de détails.

Le système linéaire global est donc de la forme

$$A_{ij} \psi_{w,j}^{(t+1)} = B_i \quad (3.13)$$

pour  $i, j = 2, 3, \dots, N$  car on a une condition de Dirichlet au nœud 1.

Avec la notation matricielle, on a

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2N} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3j} & \cdots & A_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{Nj} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{w,2}^{(t+1)} \\ \psi_{w,3}^{(t+1)} \\ \vdots \\ \psi_{w,j}^{(t+1)} \\ \vdots \\ \psi_{w,N}^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} + \text{Terme de bord} \quad (3.14)$$

Comme on peut le constater en (3.14), le terme de bord apparu dans le développement de la formulation variationnelle (voir équation (3.6)) est intégré à cette étape, lorsque la matrice globale et le membre de droite global sont assemblés.

Le système linéaire global est résolu à l'aide d'une factorisation LU. Le programme de simulation numérique qui permet d'effectuer toutes ces étapes a été développé sur Matlab. Sa structure et son fonctionnement sont présentés à l'annexe 1. Il est à noter que toutes les simulations numériques de cette étude ont été réalisées sur un ordinateur IBM doté d'un processeur *Pentium III 750 MHz*.

#### 4 STRUCTURE DU CAPTEUR-LOGICIEL

Lors de la présentation des concepts théoriques, il est clairement ressorti que le contrôle d'une infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé passe par le suivi de la conductivité hydraulique non saturée du milieu. Ce suivi implique la construction de capteurs-logiciels pour observer les états non mesurés en continu qui permettront ensuite l'estimation de paramètres inconnus en temps réel. Les états mesurés localement qui suscitent l'intérêt dans cette étude sont les suctions  $\psi_w$  sur le long de la colonne et le paramètre à estimer en temps réel est la conductivité hydraulique non saturée du sol.

##### 4.1 Structure de l'estimateur/observateur

Selon la structure des estimateurs/observateurs développée par Bastin et Dochain (1990), les équations permettant d'estimer en temps réel la conductivité hydraulique non saturée ont la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Système : } \quad & \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = (\text{Régresseur}) \cdot K_w + \dots \\
 \text{Modèle estimateur / observateur :} \\
 \text{Observateur : } \quad & \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} = (\text{Régresseur}) \cdot \hat{K}_w + \dots + \Phi \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \\
 \text{Estimateur : } \quad & \frac{\partial \hat{K}_w}{\partial t} = \Gamma \frac{1}{(\text{Régresseur})} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



où  $\psi_w$  est la succion mesurée,  $\hat{\psi}_w$  est l'observation (ou prédiction) de la succion et  $\hat{K}_w$  est l'estimation de la conductivité hydraulique non saturée. Le régresseur est l'expression qui multiplie le paramètre à estimer dans l'équation du système. Les gains  $\Phi$  et  $\Gamma$  doivent être choisis de telle sorte qu'il y ait convergence des équations du système.

Si la formulation forte de l'équation de Richards telle que présentée en (2.6) est utilisée pour développer une structure d'estimateur/observateur, un régresseur pour la conductivité hydraulique non saturée ne peut être identifié *a priori* car ce paramètre se situe à l'intérieur d'une dérivée. Un régresseur ne peut être obtenu qu'en dérivant le produit à l'intérieur des crochets de (2.6), soit

$$\begin{aligned} C_w(\psi_w) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_w(\psi_w) \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \\ &= K_w(\psi_w) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) + \frac{\partial K_w(\psi_w)}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'équation précédente fait intervenir deux paramètres, soit la conductivité hydraulique non saturée et sa dérivée spatiale.

En posant  $\theta_1 = K_w(\psi_w)$ ,  $\theta_2 = \frac{\partial K_w(\psi_w)}{\partial z}$  et  $C_w = C_w(\psi_w)$ , l'équation (4.2) devient

$$C_w \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = \theta_1 \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} + \theta_2 \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \quad (4.3)$$

Les équations du système estimateur/observateur pour deux paramètres prennent alors la forme suivante :

$$\text{Système : } \quad \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = \frac{1}{C_w} \left[ \theta_1 \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} + \theta_2 \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (4.4)$$

*Modèle estimateurs / observateur :*

$$\text{Observateur : } \quad \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} = \frac{1}{\hat{C}_w} \left[ \hat{\theta}_1 \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2} + \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right) \right] + \Phi \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Estimateurs : } \quad \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} &= \Gamma_1 \frac{1}{\frac{1}{\hat{C}_w} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2}} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \\ \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial t} &= \Gamma_2 \frac{1}{\frac{1}{\hat{C}_w} \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right)} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans le système (4.4) - (4.6),  $\psi_w$  est la succion mesurée,  $\hat{\psi}_w$ ,  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  sont respectivement l'observation de la succion et l'estimation des paramètres relatifs à la conductivité hydraulique non saturée (lesquelles proviennent du modèle) et  $\Phi, \Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des gains. Ces gains doivent être choisis de telle sorte que l'observateur et les estimateurs convergent. De plus, l'expression  $\hat{C}_w$  représente la capacité capillaire évaluée avec la succion prédite, soit  $C_w\left(\hat{\psi}_w\right)$ .

La différence majeure entre cette structure et celle utilisée par Schoefs (2002) pour estimer la conductivité hydraulique non saturée réside dans le fait que la discrétisation spatiale de l'équation de Richards suivant la MDF permet l'obtention directe d'un régresseur. C'est donc dire que le régresseur utilisé par Schoefs provient de la formulation discrétisée de l'équation de Richards, alors que celui qui est utilisé dans ce projet provient de la forme continue de cette même équation. Dans le cas de la forme faible de l'équation de Richards provenant d'un développement suivant la MEF, il s'est avéré impossible d'identifier un régresseur pour la conductivité hydraulique non saturée. De fait, l'utilisation du théorème de Green fait apparaître des intégrales qui complexifient grandement l'identification d'une expression multipliant le paramètre qui nous intéresse (voir (3.2)). Bref, l'utilisation de la MDF permet à Schoefs d'obtenir un modèle d'estimation à un seul paramètre alors que nous nous retrouvons dans l'obligation de considérer un modèle à deux paramètres de par l'utilisation de la MEF.

Une autre différence notable réside en l'utilisation de la valeur prédite de la succion  $\hat{\psi}_w$  plutôt que sa valeur mesurée  $\psi_w$  dans les équations du modèle en (4.5)-(4.6). Dans le modèle, les dérivées spatiales sont évaluées plus justement lorsque les observations  $\hat{\psi}_w$  sont utilisées pour les approximations. Si les mesures  $\psi_w$  étaient utilisées pour approximer ces dérivées (comme dans le thèse de Schoefs (2002)), une erreur considérable serait introduite étant donné que seules les mesures  $\psi_w$  fournies par les capteurs de pression sont introduites dans l'algorithme. Comme il n'y a que huit points de mesure sur la colonne, le maillage de résolution comporterait un nombre restreint de nœuds, lesquels seraient par le fait même trop espacés, et de l'information importante serait perdue entre ces nœuds. Autrement dit, le fait de résoudre le modèle en  $\hat{\psi}_w$  plutôt qu'en  $\psi_w$  va probablement améliorer la justesse des résultats. Il est à noter que cette stratégie de résolution aurait pu être utilisée avec l'équation d'observation résolue selon la MDF : l'idée de résoudre en  $\hat{\psi}_w$  plutôt qu'en  $\psi_w$  est indépendante du schéma de résolution. Une autre possibilité aurait été d'utiliser des splines pour interpoler les mesures  $\psi_w$  entre les nœuds où l'on retrouve un capteur de pression. Nous aurions alors eu toute l'information voulue pour résoudre le modèle en  $\psi_w$ .

La stratégie consiste donc en l'utilisation d'un maillage fin pour résoudre le modèle en  $\hat{\psi}_w$  et en l'ajout du terme de correction  $\Phi\left(\psi_w - \hat{\psi}_w\right)$  aux nœuds qui correspondent à

une position de capteur de pression sur la colonne d'infiltration. Les mesures  $\psi_w$  proviennent de la résolution de l'équation de Richards selon la MEF ou la MDF. Dans un contexte expérimental, nous aurions plutôt utilisé directement les mesures fournies par les capteurs de pression.

Alors on a  $\psi_w^{(t)}$  et  $\hat{\psi}_w^{(t)}$ , les suctions mesurées et prédites où  $t$  représente l'itération en temps. Soit  $\hat{\theta}_k^{(t),(n)}$ , le  $k$ ème paramètre à estimer,  $k$  allant de 1 à 2, où  $t$  représente l'itération en temps et  $n$  le  $n$ ème capteur de pression,  $n$  allant de 1 au nombre de capteurs de pression considéré. Considérons de plus le facteur de correction suivant au temps  $t$  :

$$F_{corr}^{(t)} = \begin{cases} \psi_w^{(t)} - \hat{\psi}_w^{(t)} & \text{si } z = z_i, \quad i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.7)$$

Ces considérations sont utilisées au niveau de l'algorithme de résolution du modèle d'estimateurs/observateur (capteur-logiciel), lequel est présenté à la page suivante.

0.  $\psi_w^{(0)}$  ;  $\hat{\psi}_w^{(0)}$  ;  $\hat{\theta}_k^{(0),(n)}$  connus,

1. Pour  $t = 0, 1, 2, \dots$  jusqu'à la fin de la simulation,

1.1 Résoudre avec la MEF sur toute la longueur de la colonne d'infiltration

$$\hat{\psi}_w^{(t+1)} = \hat{\psi}_w^{(t)} + \frac{\Delta t}{\hat{C}_w^{(t+1)}} \left[ \hat{\theta}_1^{(t)} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w^{(t+1)}}{\partial z^2} + \hat{\theta}_2^{(t)} \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w^{(t+1)}}{\partial z} - 1 \right) \right] + \Delta t \Phi F_{corr}^{(t)}$$

avec le terme de correction appliqué seulement aux nœuds où il y a un capteur tel que défini en (4.7).

1.2 Pour  $n = 1, 2, \dots$ , nombre de capteurs de pression,

1.2.1 Résoudre

$$\hat{\theta}_1^{(t+1),(n)} = \Delta t \Gamma_1 \frac{1}{\frac{1}{\hat{C}_w^{(t+1)}} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w^{(t+1),(n)}}{\partial z^2}} F_{corr}^{(t)} + \hat{\theta}_1^{(t),(n)}$$

1.2.2 Résoudre

$$\hat{\theta}_2^{(t+1),(n)} = \Delta t \Gamma_2 \frac{1}{\frac{1}{\hat{C}_w^{(t+1)}} \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w^{(t+1),(n)}}{\partial z} - 1 \right)} F_{corr}^{(t)} + \hat{\theta}_2^{(t),(n)}$$

Il importe d'interpoler les paramètres  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  entre les nœuds où l'on retrouve un capteur de pression. Pour les premières simulations, nous utilisons les véritables expressions de ces paramètres pour l'interpolation. Les valeurs des paramètres  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$

entre les nœuds où l'on retrouve un capteur de pression correspondent donc à

$$\hat{\theta}_1 = K_w \left( \hat{\psi}_w \right) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\partial K_w \left( \hat{\psi}_w \right)}{\partial z}. \quad \text{Ceci nous donnera probablement un coup de}$$

pouce pour débiter l'étude du comportement du modèle d'estimation étant donné que ce dernier connaît exactement le profil des paramètres entre les points de mesure.

## 4.2 MEF appliquée à l'équation d'observation du modèle

L'application de la MEF à l'équation (4.5) suit les mêmes étapes que celles présentées à la section 3.2 concernant l'application de la MEF à l'équation de Richards. Dans cette section, le développement est par conséquent abrégé et seules certaines étapes sont présentées.

La formulation variationnelle du problème est la suivante :

$$\int_{\Omega} \hat{C}_w \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \left[ \hat{\theta}_1 \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2} + \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right) \right] + \Phi F_{corr} \right\} \varphi \, d\Omega \quad (4.8)$$

$$\forall \varphi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad H_{\Omega_0}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi(0) = 0 \right\}.$$

Les conditions aux limites de la résolution de l'équation de Richards, lesquelles sont présentées au chapitre 3, sont utilisées pour la résolution du modèle en  $\hat{\psi}_w$ . Ces

conditions sont  $\hat{\psi}_w(t, 0) = \hat{\psi}_w^c$  fixée et  $\frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z}(t, 150) = 0$ . En distribuant, on a

l'expression

$$\int_{\Omega} \hat{C}_w \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\theta}_1 \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2} \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right) \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \Phi F_{corr} \varphi d\Omega \quad (4.9)$$

Le terme comportant une dérivée seconde doit être intégré par partie. Une fois cette étape effectuée, l'équation (4.9) prend l'allure qui suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{C}_w \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{\theta}_1 \varphi \right) \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right) \varphi d\Omega \\ = \int_{\Omega} \Phi F_{corr} \varphi d\Omega + \left[ \left( \hat{\theta}_1 \varphi \right) \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.10)$$

En dérivant le produit entre parenthèses au niveau du terme de gauche provenant de l'intégration par partie et en évaluant le terme de bord, on obtient



$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \hat{C}_w \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \hat{\theta}_2 \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} \varphi d\Omega = - \int_{\Omega} \hat{\theta}_2 \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \Phi F_{corr} \varphi d\Omega
\end{aligned} \tag{4.11}$$

car le terme de bord devient nul en utilisant les conditions aux frontières du problème

dans (4.10). Comme  $\hat{\theta}_2 = \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial z}$ , la forme faible prend l'allure suivante :

$$\int_{\Omega} \hat{C}_w \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \hat{\theta}_2 \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \Phi F_{corr} \varphi d\Omega \tag{4.12}$$

En utilisant un schéma d'Euler implicite pour le temps, en évaluant le terme d'erreur au temps précédent et en considérant l'algorithme de point fixe présenté à la section 3.4

afin d'évaluer correctement le terme de la capacité capillaire  $\hat{C}_w = C_w \left( \hat{\psi}_w^{(t+1)} \right)$ , la

formulation variationnelle devient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \hat{C}_w^{(t+1)} \hat{\psi}_w^{(t+1)} \varphi d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \hat{\theta}_1^{(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_w^{(t+1)}}{\partial z} d\Omega = \int_{\Omega} C_w^{(t+1)} \hat{\psi}_w^{(t)} \varphi d\Omega \\
& - \Delta t \int_{\Omega} \hat{\theta}_2^{(t)} \varphi d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \Phi F_{corr}^{(t)} \varphi d\Omega
\end{aligned} \tag{4.13}$$

En adaptant au présent développement la notation présentée en (3.7), soit

$$\left. \hat{\psi}_w^{(t+1)} \right|_{\Omega} = \sum_{j=1}^N \hat{\psi}_{w,j}^{(t+1)} \varphi_j \quad (4.14)$$

où les fonctions  $\varphi_j$  sont toujours les fonctions d'interpolation globales de Galerkin.

Comme  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{\text{éléments}}} K^e$ , on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \hat{\psi}_{w,j}^{(t+1)} \left[ \sum_{e=1}^{N_{\text{éléments}}} \left( \int_{K^e} \hat{C}_w^{(t+1)} \varphi_i \varphi_j dz + \Delta t \int_{K^e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \hat{\theta}_1^{(t)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dz \right) \right] = \\ \sum_{e=1}^{N_{\text{éléments}}} \left( \int_{K^e} C_w^{(t+1)} \varphi_i \hat{\psi}_w^{(t)} dz - \Delta t \int_{K^e} \hat{\theta}_2^{(t)} \varphi_i dz + \Delta t \int_{K^e} \Phi F_{corr}^{(t)} \varphi_i dz \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\forall \varphi_i \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  et  $i = 1, 2, \dots, N$ . Les inconnues du problème sont maintenant les  $\hat{\psi}_{w,j}^{(t+1)}$ .

Le développement des étapes subséquentes, soit le passage à l'élément de référence, l'intégration numérique selon la quadrature de Gauss et l'assemblage des éléments, est similaire à celui qui est présenté aux sections 3.5.1 et 3.6 pour l'équation de Richards. Il sera par conséquent volontairement omis dans la présente section.

## 5 RÉSULTATS ET DISCUSSION

### 5.1 Paramètres des relations de van Genuchten-Mualem

Tel que mentionné dans la section 2.1 du chapitre présentant les concepts théoriques relatifs à l'étude, ce mémoire ne comporte pas de partie expérimentale. Conséquemment, les paramètres présents dans les relations de van Genuchten-Mualem, lesquelles définissent la conductivité hydraulique non saturée entre autres, sont tirés des expériences menées par Schoefs (2002). Ce dernier a identifié les paramètres de deux manières, soit par l'analyse de la courbe de rétention d'eau propre à l'infiltration et par un calage de courbe à partir de résultats de simulation. Les résultats obtenus par calage de courbe sont retenus dans cette étude. Les valeurs des paramètres en cause sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 5-1 Paramètres des relations de van Genuchten-Mualem (Schoefs, 2002)

Paramètre	Unités	Identification par calage de courbe
$K_{sat}$	cm/h	10
$\alpha$	1/cm	0,07
$n$		2,5
$m = 1 - 1/n$		0,6

## 5.2 Résultats de simulations avec la MDF

En premier lieu, les résultats de simulation obtenus par Schoefs (2002) lors de ses travaux de doctorat sont présentés. La figure 5-1 compare les résultats de simulation aux mesures expérimentales de la succion  $\psi_w$  pour un maillage comportant 150 nœuds. Il est à noter que toutes les représentations graphiques de l'infiltration utilisent la même légende de couleurs pour identifier la position des capteurs de pression.

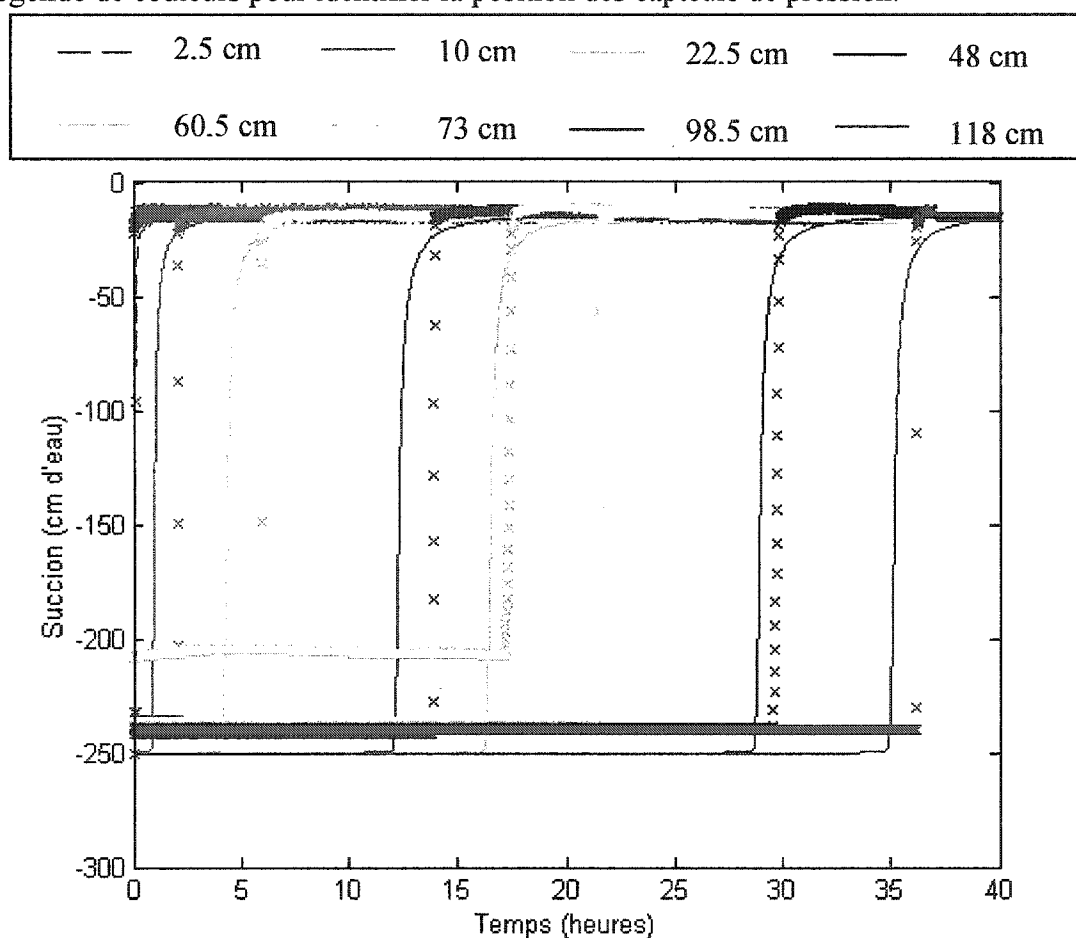


Figure 5-1 Simulation de l'infiltration avec la MDF (150 nœuds).

Le phénomène consiste donc en un front qui se propage dans le temps. Lorsque ce front arrive à une position donnée, la succion mesurée par le capteur correspondant passe de la condition initiale de l'infiltration, soit  $\psi_w^{(0)} = -250$  cm d'eau, à la condition imposée en tête de colonne, soit  $\psi_w^c(z=0) = -15$  cm d'eau. Évidemment, plus un capteur est situé profondément dans la colonne, plus le front d'eau arrive tard à ce capteur.

On peut voir sur la figure 5-1 que les courbes simulées (en continu) sont en avance par rapport aux courbes expérimentales (symboles x). De plus, il ressort que le modèle est légèrement dispersif par rapport à la réalité. Ces résultats sont obtenus grâce à la méthodologie suivante :

- Utilisation de formules aux différences pour approximer les dérivées spatiales aux nœuds afin d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires (MDF);
- Utilisation d'un intégrateur d'ordre variable (ode15s de Matlab) pour le système.

Il s'agit d'une méthode semi-discrète, car l'équation de Richards n'est pas discrétisée dans le temps. Donc, la stratégie de résolution utilisée par Schoefs implique que, pour une taille de maille fixe ( $\Delta z = 1$  cm dans le cas présent), l'intégrateur d'ordre variable ajuste le pas de temps pour assurer la convergence et la stabilité des résultats de simulation. Ainsi le pas de temps n'est-il pas fixe dans ce schéma de résolution.

### 5.3 Résultats de simulation avec la MEF

Les résultats de simulation d'une infiltration obtenus avec la MEF sont présentés dans les sections qui suivent. La méthodologie de résolution privilégiée est la suivante :

- Utilisation d'une base polynomiale pour approcher les variables du problème et discrétisation du domaine avec des éléments linéaires (MEF);
- Utilisation d'une discrétisation d'Euler implicite pour le schéma temporel.

Il s'agit d'une méthode discrète dans l'espace et dans le temps contrairement à la méthode semi-discrète utilisée par Schoefs. De cette manière, nous contrôlons mieux les paramètres de simulation parce que nous n'utilisons pas de boîte noire du type ode15s de Matlab.

#### 5.3.1 Effet du pas de temps

Comme un schéma d'Euler implicite implique que le pas de temps est constant, il est intéressant d'étudier l'effet de ce dernier sur les résultats de simulation, et ce pour une taille de maille constante ( $\Delta z = 1$  cm dans ce cas-ci). La figure 5-2 montre les résultats de simulation avec la MEF pour différents pas de temps. À partir de maintenant, les courbes simulées obtenues par Schoefs avec la MDF deviennent les courbes de référence (symboles x). La raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé les courbes expérimentales de Schoefs (symboles x de la figure 5-1) comme courbes de référence est

que ces dernières sont pratiquement superposées aux résultats de simulation par la MDF lorsque représentées sur l'échelle de temps de la figure 5-2. De plus, étant donné que l'idée est de comparer deux méthodes numériques, nous avons choisi de considérer les résultats de simulation par la MDF comme résultats de référence. Par souci de clarté, seulement trois capteurs de pression sont présentés sur la figure, soit ceux correspondant aux positions 10 cm, 48 cm et 98,5 cm de la colonne d'infiltration.

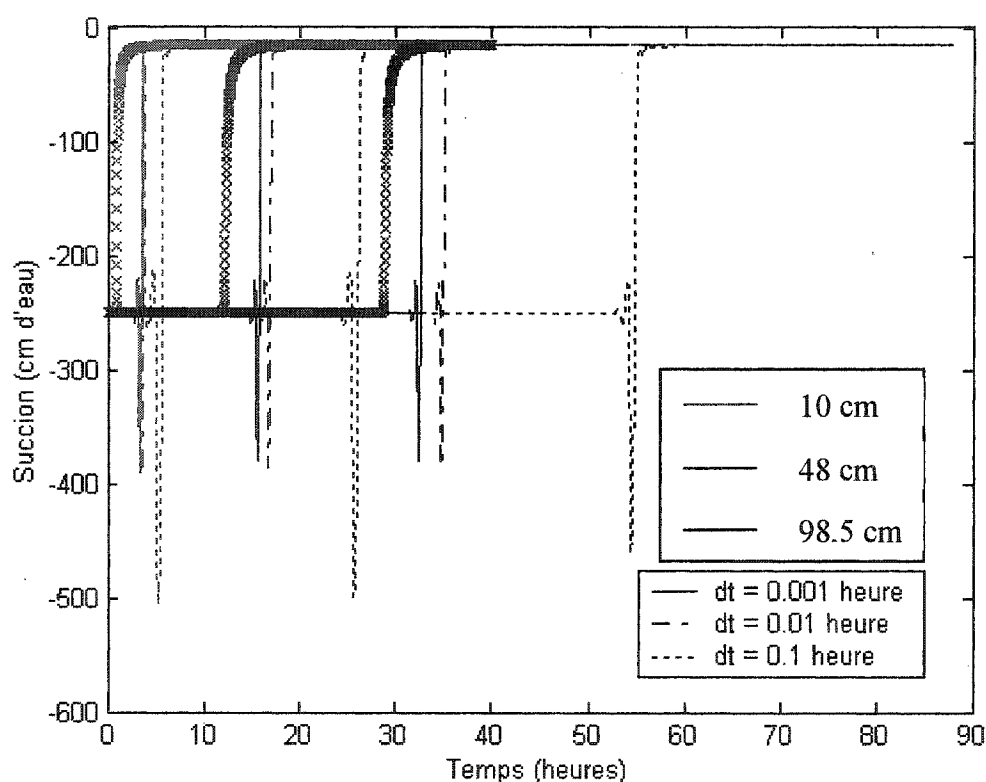


Figure 5-2 Simulation de l'infiltration avec la MEF (150 éléments) : effet du pas de temps.

Tout d'abord, d'importantes oscillations sont présentes à la base du front. Ces oscillations peuvent être éliminées par upwinding, un stratagème numérique très utilisé pour ce type de problème. L'upwinding consiste en une modification des fonctions-tests  $\varphi$  du schéma de résolution par la MEF de manière à créer de la diffusion numérique (ou viscosité numérique) dans le sens de l'écoulement. On se souvient que la formulation de Galerkin, laquelle implique l'utilisation de fonctions-tests et de fonctions d'interpolation issues de la même classe de fonctions, est utilisée dans ce mémoire. Brooks et Hughes (1982) présentent quant à eux la formulation SUPG (« Streamline Upwind/Petrov-Galerkin ») qui propose l'utilisation de fonctions-tests modifiées. Dans le cas qui nous intéresse (unidirectionnel selon  $z$ ), les fonctions de pondération modifiées prennent l'allure suivante :

$$\sigma = \varphi + \varepsilon v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5.1)$$

où  $\sigma$  est la fonction-test modifiée,  $\varphi$  est la fonction-test de Galerkin,  $\varepsilon$  est un paramètre,  $v$  est la vitesse de l'écoulement et  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  est le gradient de la fonction-test de Galerkin dans la direction de l'écoulement.

L'utilisation de ces fonctions-tests a pour effet de générer de la diffusion numérique dans le sens de l'écoulement et de régulariser la solution (Bertrand, 1996). La méthode SUPG est généralement privilégiée pour sa simplicité et sa robustesse. Par contre, dans



le cas de l'équation de Richards, la vitesse de l'écoulement n'est pas explicite. Ce fait rend la méthode SUPG beaucoup moins conviviale que pour un problème de transfert de chaleur où la vitesse de l'écoulement est connue. L'utilisation de cette méthode pour éliminer les oscillations affectant les courbes simulées de la figure 5-2 est par conséquent mise de côté pour l'instant. Cependant, étant donné que la présence de ces oscillations à la base du front peut avoir un effet sur la position de ce dernier, il est important de tenter de les éliminer. Nous reviendrons sur ce point dans les prochaines sections.

Par ailleurs, on observe qu'une diminution du pas de temps implique que les résultats de simulation se rapprochent des courbes de référence. En effet, on peut voir sur la figure 5-2 que plus le pas de temps diminue, plus les courbes simulées sont près des courbes de référence. Ces résultats permettent de croire que les simulations se superposeront aux courbes de référence si le pas de temps est diminué davantage. Cependant, tel n'est pas le cas étant donné que le pas de temps ne peut être arbitrairement diminué.

De fait, des simulations avec la MEF ont été effectuées dans le but de retrouver une durée d'infiltration de 40 heures, durée qui a été utilisée par Schoefs comme argument de la fonction `ode15s` lors de ses simulations. C'est donc dire que la durée totale de l'infiltration est connue avant même le début de la simulation avec la méthodologie utilisée par Schoefs, l'intégrateur d'ordre variable ajustant le pas de temps pour assurer la convergence à l'intérieur de la durée totale prescrite. Dans le cas de la méthodologie

privilégiée dans ce mémoire, la durée totale d'une infiltration ne peut être connue qu'à la fin de la simulation, le pas de temps étant fixé au départ. La figure 5-3 présente la durée d'infiltration obtenue en fonction du pas de temps utilisé lors de la résolution du modèle avec la MEF ( $\Delta z = 1$  cm fixe).

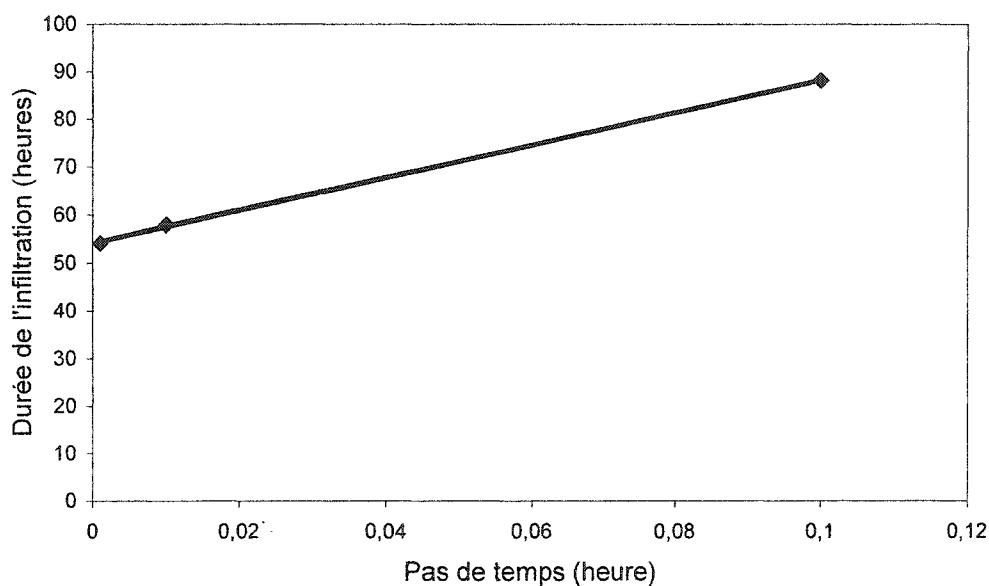


Figure 5-3 Durée de l'infiltration en fonction du pas de temps avec la MEF ( $\Delta z = 1$  cm).

Bien que nous ne soyons pas certains que la relation entre la durée de l'infiltration et le pas de temps soit théoriquement linéaire, cette figure semble indiquer que, pour une taille de maille fixe de 1 cm, une durée d'infiltration de 40 heures ne peut pas être obtenue si la MEF et un schéma en temps d'Euler implicite sont utilisés pour résoudre l'équation de Richards. On voit bien sur la figure 5-3 que la courbe de tendance de la durée d'infiltration en fonction du pas de temps coupera l'ordonnée à une valeur

supérieure à 40 heures. Avec la MDF et le résolveur d'ordre variable ode15s, des pas de temps petits sont utilisés lorsque requis par le système et une durée d'infiltration de 40 heures est obtenue sans problème. En définitive, considérant notre stratégie avec des éléments de taille constante ( $\Delta z = 1$  cm comme pour la MDF), la seule diminution du pas de temps n'implique pas nécessairement que les résultats de simulation sont précis et ne nous permet pas d'atteindre la durée d'infiltration souhaitée.

### 5.3.2 Analogie avec l'équation de convection-dispersion

Pour mieux comprendre le comportement de l'équation de Richards, il est intéressant de faire une analogie entre cette dernière et l'équation de convection-diffusion (aussi appelée équation d'advection-diffusion). Cette analogie est présentée par El-Kadi et Ling (1993). Elle implique l'utilisation de la transformation de Kirchhoff, laquelle est définie comme suit :

$$u = u(\psi) = \int_{\psi_{\max}}^{\psi} K(\psi) d\psi \quad (5.2)$$

où  $\psi_{\max}$  est la pression d'eau la plus élevée sur le domaine de résolution. En utilisant cette transformation, il est montré que la forme- $\psi$  de l'équation de Richards peut s'écrire de la manière suivante :

$$D(u) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(u) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) est analogue à l'équation de convection-diffusion et elle comprend un terme convectif (équation (5.4)) et un terme diffusif (équation (5.5)).

$$v(u) = \frac{1}{C[\psi(u)]} \frac{dK[\psi(u)]}{d\psi} = \frac{dK[\psi(u)]}{d\theta} \quad (5.4)$$

$$D(u) = \frac{K[\psi(u)]}{C[\psi(u)]} \quad (5.5)$$

Le terme convectif précédemment identifié correspond à la vitesse de l'écoulement qui nous faisait défaut lorsqu'il était question d'upwinding à la section 5.3.1. En effet, l'analogie entre l'équation de Richards et l'équation de convection-diffusion met en lumière cette vitesse  $v$ , laquelle est implicite dans l'équation de Richards sous sa forme usuelle. Physiquement, la vitesse  $v$  représente un gradient de succion et elle décrit la vitesse de propagation du front. Mathématiquement, elle est proportionnelle à un gradient de conductivité hydraulique. Plus le sol est sec au départ, plus ce gradient est élevé à la position du front d'eau. Dans la suite de l'analyse, nous utiliserons l'expression vitesse de mouillage (traduction libre de « soil moisture velocity ») pour exprimer la vitesse  $v$ .

De plus, la similarité entre l'équation de Richards telle que présentée en (5.3) et l'équation de convection-diffusion permet l'identification des nombres adimensionnels suivants :

$$Pe_{\Delta z}(\psi) = \frac{v}{D} \Delta z = \frac{1}{K} \frac{dK}{d\psi} \Delta z \quad (5.6)$$

$$Co_{\Delta t, \Delta z}(\psi) = v \frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{dK}{d\theta} \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (5.7)$$

qui font intervenir le pas de temps  $\Delta t$  et la taille de maille  $\Delta z$ . Le nombre de Peclet indique l'importance relative de la convection par rapport à la diffusion alors que le nombre de Courant indique l'importance du phénomène convectif par rapport au terme transitoire.

Lorsqu'un phénomène convectif-diffusif est en jeu, un faible nombre de Peclet permet d'assurer la stabilité des résultats. En effet, l'amplitude des oscillations numériques est directement reliée à la taille du nombre de Peclet. Au cours du procédé d'infiltration étudié, le nombre de Peclet local varie de plusieurs ordres de grandeur. Par exemple, ce nombre est élevé à la position du front d'eau, soit lorsque la convection domine, et il est faible lorsque le sol est mouillé, soit lorsque la diffusion domine. Aussi, plus le sol est sec au départ (plus la succion est négative), plus le phénomène convectif est important et

plus le nombre de Peclet local est élevé à la position du front d'eau. C'est ce qui explique la présence de fortes oscillations à la base du front sur la figure 5-2.

Comme la stabilité des résultats passe par l'utilisation d'un faible nombre de Peclet local, la taille de maille  $\Delta z$  doit être ajustée localement, selon la position étudiée dans la colonne d'infiltration. Si l'on se trouve à un endroit où la convection domine, la taille de maille doit être diminuée afin de s'assurer que le nombre de Peclet local soit suffisamment faible. En définitive, le nombre de Peclet local est relativement faible partout dans la colonne, sauf à la position du front d'eau car à cette position la vitesse de mouillage  $v$  est élevée et la convection domine. C'est exactement à cette position que nous devrions adapter le maillage (diminuer la taille de maille  $\Delta z$ ) pour s'assurer de diminuer le nombre de Peclet local et ainsi éviter les oscillations. De plus, il importe de s'assurer que le nombre de Courant local soit petit, donc que le pas de temps  $\Delta t$  n'est pas trop grand par rapport à la taille de maille  $\Delta z$ . Il s'avère donc primordial d'étudier l'effet de la taille de maille sur les résultats de simulation obtenus avec la MEF.

Bref, lorsque le schéma en temps utilisé pour résoudre l'équation de Richards diffère d'un résolveur d'ordre variable, le nombre de Peclet obtenu en (5.6) montre qu'une diminution du pas de temps ne garantit pas la stabilité des résultats. À cette fin, la taille de maille doit aussi être considérée.

### 5.3.3 Effet de la taille de maille

La figure 5-4 présente les résultats de simulation avec la MEF pour différentes tailles de maille, le pas de temps étant fixé à 0.01 heure. Pour diminuer la taille de maille, il suffit de mailler davantage le domaine de calcul, c'est-à-dire d'augmenter le nombre d'éléments. Les courbes de référence (symboles x) sont toujours les résultats de simulation obtenus avec la MDF sur un maillage de 150 nœuds ( $\Delta z = 1$  cm). Comme on le voit bien à la figure 5-4, la taille de maille a un effet considérable sur les résultats de simulation avec la MEF. D'une part, plus la taille de maille diminue, plus les courbes simulées se rapprochent des courbes de référence. D'autre part, une diminution de la taille de maille entraîne une atténuation des oscillations à la base du front d'eau parce que le nombre de Peclet local diminue.

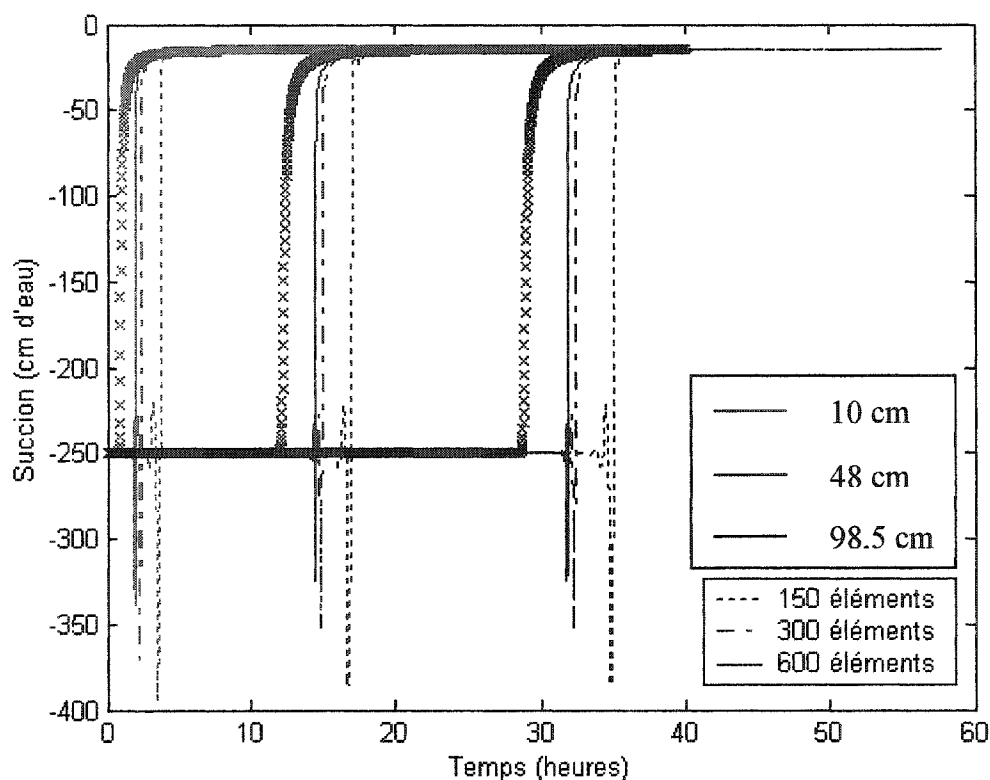


Figure 5-4 Simulation de l'infiltration avec la MEF ( $\Delta t = 0.01$  heure) : effet de la taille de maille.

Cependant, il semble que les oscillations ne pourront être complètement éliminées, et ce même si la taille de maille est diminuée davantage. De fait, les courbes simulées pour un maillage de 600 éléments, lesquelles comportent toujours des oscillations importantes, sont très près des courbes simulées pour un maillage de 300 éléments. Ceci porte à croire que même si un maillage plus fin encore est utilisé, les résultats ne s'en trouveront pas énormément modifiés.



Finalement, le nombre de Peclet à la position du front d'eau est trop élevé dans les précédentes simulations pour qu'une diminution de la taille de maille puisse contrôler la stabilité de l'infiltration. En effet, les conditions initiales de l'infiltration ( $\psi_w^0 = -250$  cm d'eau partout dans la colonne) confèrent au sol une nature très sèche. Cette nature implique que le gradient de conductivité hydraulique est très prononcé lorsque le front d'eau passe; trop prononcé pour qu'une diminution de la taille de maille ne fasse en sorte que la convection soit du même ordre de grandeur que le diffusion.

Pour illustrer l'effet important des conditions initiales de l'infiltration sur la taille des oscillations à la base du front d'eau, d'autres simulations ont été effectuées, cette fois avec un sol moins sec au départ. La figure 5-5 compare les résultats obtenus avec la MEF (en continu) à ceux obtenus avec la MDF (symboles x) pour un sol plutôt humide. Le schéma de discrétisation utilisé pour la MEF est relativement grossier, soit  $\Delta z = 1$  cm et  $\Delta t = 0.1$  heure. Dans ce cas-ci, une diminution conjointe de la taille de maille et du pas de temps permettrait d'éliminer le décalage subsistant entre les résultats de simulation obtenus selon la MEF et la MDF. Cependant, tel n'est pas notre but ici. Nous voulons simplement montrer l'influence des conditions initiales de l'infiltration sur les oscillations à la base des courbes simulées. On voit clairement sur cette figure que le fait d'utiliser un sol moins sec au départ a un effet sur la présence d'oscillations à la base du front d'eau. Dans ce cas, le gradient de conductivité hydraulique causé par l'arrivée du front est beaucoup moins prononcé que si le sol était très sec. Cela implique que la vitesse de mouillage reste modérée, que le nombre de Peclet local reste faible et que

nous ne retrouvons pas d'oscillations à la base du front. La légende utilisée pour la figure 5-5 est la même que celle qui est utilisée pour la figure 5-1.

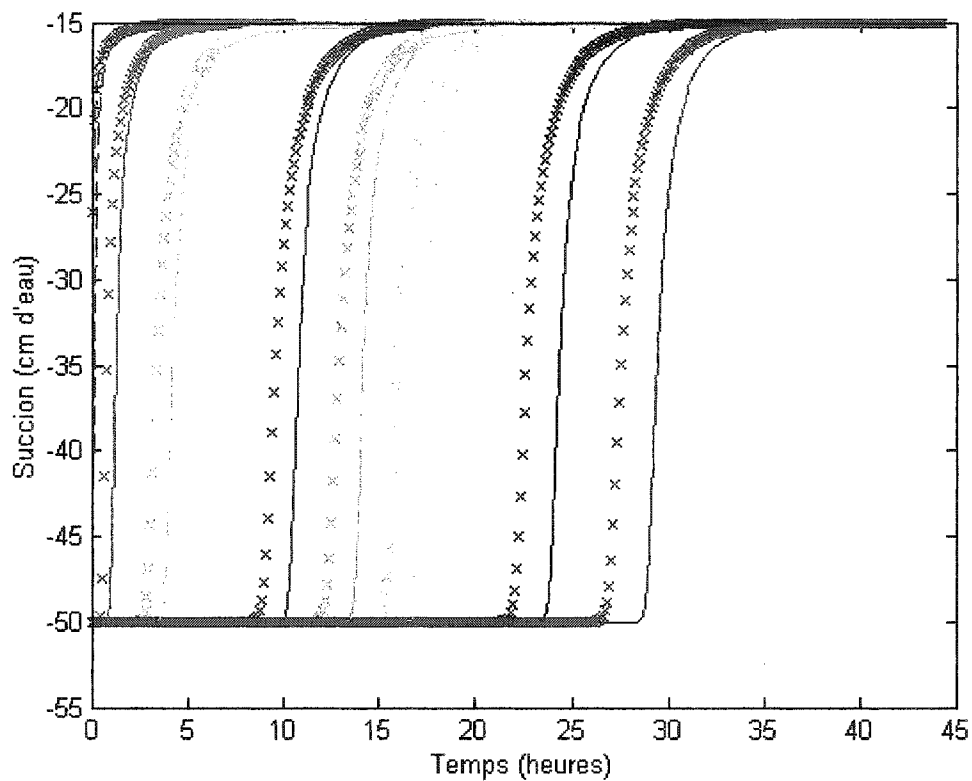


Figure 5-5 Simulation de l'infiltration avec la MEF (150 éléments et  $\Delta t = 0.1$  heure) avec  $\psi_w^0 = -50$  cm.

#### 5.3.4 Correspondance des résultats de simulation

Un examen des figures 5-2 et 5-4 montre que les résultats de simulation obtenus avec la MEF ne pourront correspondre aux résultats de simulation obtenus avec la MDF

(courbes de référence) que si le pas de temps et la taille de maille utilisés dans la résolution par éléments finis sont diminués conjointement. Cependant, de telles modifications impliquent une augmentation très importante du temps de calcul de l'ordinateur, ce qui les rend moins attrayantes.

De plus, comme il est probable que les oscillations à la base du front d'eau aient un effet sur la position de ce dernier, il est important de tenter de les éliminer. Étant donné qu'on ne peut modifier les conditions initiales de l'infiltration, on peut procéder de deux manières : par upwinding ou par diminution de la taille de maille. La première solution a d'abord été mise de côté étant donné la nature implicite de la vitesse de mouillage dans l'équation de Richards. Bien qu'une transformation de cette équation (section 5.3.2) ait permis d'exprimer mathématiquement cette vitesse de mouillage, il reste que l'expression obtenue est très peu conviviale à utiliser. Elle comprend en effet la dérivée de la conductivité hydraulique par rapport à la succion  $\frac{dK[\psi(u)]}{d\psi}$  après l'application de la transformation de Kirchhoff (équation (5.2)). Bref, considérant la complexité de l'expression de la vitesse de mouillage, nous avons décidé de laisser de côté la méthode d'upwinding de type SUPG présentée à la section 5.3.1.

Par ailleurs, certaines limitations sont apparues lors de l'utilisation de la deuxième solution proposée, soit de mailler plus finement afin de s'assurer que le nombre de Peclet soit suffisamment faible. Il a été montré que les conditions initiales de

l'infiltration font en sorte que la vitesse de mouillage à la position du front est trop importante pour qu'une diminution de la taille de maille puisse contrôler la stabilité de l'infiltration. Un changement dans ces conditions initiales, soit l'utilisation d'un sol plus humide au début de l'infiltration, permet d'éliminer les oscillations.

Dans la littérature, deux stratégies sont proposées pour éliminer ces oscillations. En effet, l'utilisation d'upwinding n'est pas nécessaire selon Eymard et al. (2001) si l'équation de Richards est résolue par rapport à la charge hydraulique  $\phi = \psi_w - z$  plutôt que par rapport à la succion  $\psi_w$ . Par ailleurs, l'utilisation d'une méthode semi-discrète semble avoir un effet stabilisateur sur les résultats de simulation de l'équation de Richards (Szymkiewicz et al., 2002). C'est probablement la raison pour laquelle la stratégie utilisée par Schoefs (2002) n'a pas nécessité d'upwinding. Il serait alors intéressant d'utiliser un schéma d'intégration d'ordre supérieur par rapport au temps pour résoudre l'équation de Richards discrétisée selon la MEF dans l'espace. Cependant, ceci introduirait l'utilisation d'une boîte noire, ce que nous voulons éviter.

Bref, des travaux futurs devront pallier au problème des oscillations sur les courbes simulées à l'aide d'une méthode discrète (discrétisation dans l'espace et dans le temps). Nous comprenons maintenant d'où ces oscillations proviennent et nous savons quelles stratégies envisager afin de les éliminer.

#### 5.4 Observation de la succion

Dans un premier temps, un modèle d'observation de la succion  $\hat{\psi}_w$  est utilisé dans le but d'évaluer l'intervalle de gains  $\Phi$  (gain de l'observateur) pour lequel l'algorithme va converger. Il est possible théoriquement de régler le gain  $\Phi$  de manière systématique, mais nous nous contentons pour l'instant d'utiliser des valeurs constantes. Nous reviendrons sur le réglage systématique des gains à la section 5.5. L'équation (4.5) est donc simulée et les expressions réelles des paramètres  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  sont utilisées. On a

$$\text{donc } \hat{\theta}_1 = K_w \left( \hat{\psi}_w \right) \text{ et } \hat{\theta}_2 = \frac{\partial K_w \left( \hat{\psi}_w \right)}{\partial z} \text{ pour les simulations du modèle d'observation.}$$

Dans un contexte expérimental, les mesures de la succion  $\psi_w$  utilisées au niveau du terme de correction de (4.5) proviendraient de tests d'infiltration en colonne. Cependant, comme cette étude ne comporte pas de partie expérimentale, les résultats de simulation sont utilisés comme mesures de référence. Ainsi les mesures de la succion  $\psi_w$  peuvent-elles être générées de deux façons. D'une part, suite à la résolution du modèle de Richards à l'aide de la MEF et, d'autre part, suite à la résolution suivant la MDF. Dans le but d'effectuer les simulations dans un laps de temps raisonnable, un pas de temps de 0.1 heure et une taille de maille de 1 cm sont utilisés pour les simulations du modèle d'observation. De plus, il est à noter que les conditions initiales des mesures  $\psi_w$

sont les mêmes que pour les simulations de l'équation de Richards présentées à la section précédente, soit  $\psi_w^{(0)} = -250$  cm d'eau.

#### 5.4.1 Mesures générées par la résolution du modèle à l'aide de la MEF

Il est dit à la section 5.3 que les courbes simulées obtenues par Schoefs avec la MDF sont les courbes de référence dans le contexte de ce projet. Il peut alors paraître incongru d'utiliser les résultats de simulation par la MEF comme mesures fournies au modèle de l'observateur. Cependant, il est utile de commencer par cette étape étant donné que l'ordre de grandeur du gain  $\Phi$  peut être plus facilement identifiable, les prédictions étant issues du même schéma de résolution que les mesures. La figure 5-6 présente donc les prédictions obtenues avec les mesures issues de la résolution par la MEF, et ce pour différents gains  $\Phi$ . L'effet des conditions initiales  $\psi_w^{(0)}$  sur les courbes prédites par le modèle est ensuite montré à la figure 5-7. Un pas de temps de 0.1 heure et une taille de maille de 1 cm sont utilisés pour générer les mesures  $\psi_w$  avec la MEF. Ces figures ne mettent en scène que trois positions de capteurs (les mêmes que pour les figures 5-2 et 5-4) par souci de clarté.

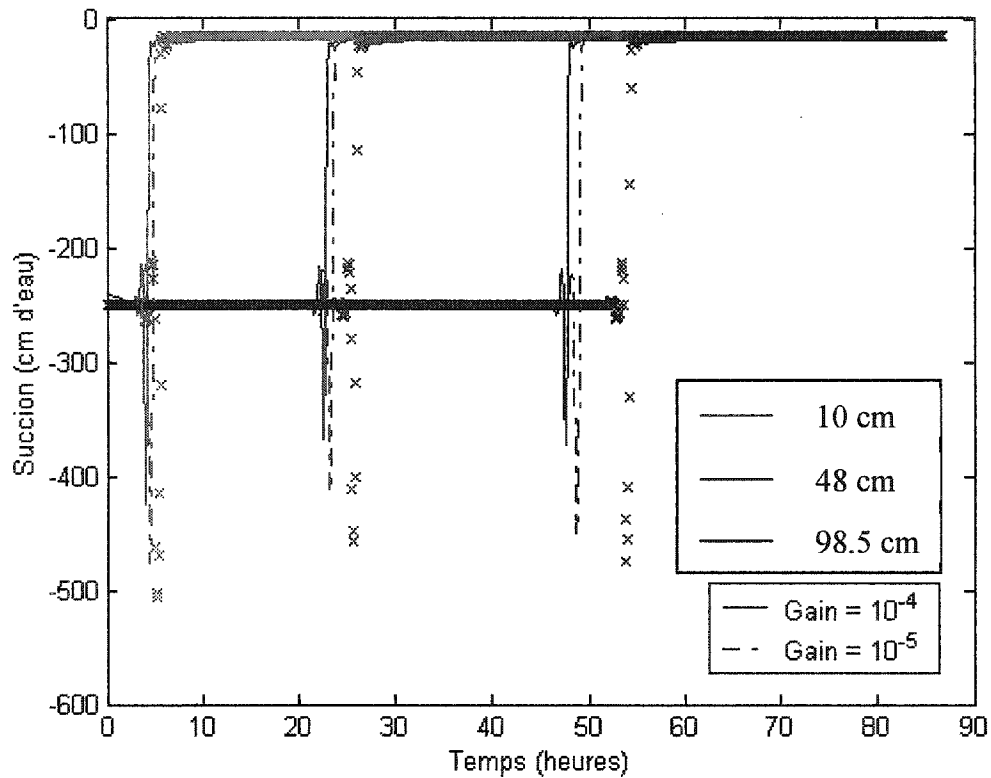


Figure 5-6 Observation de la succion pour  $\psi_w^{(0)} = -240$  cm (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MEF).

Différentes simulations ont permis de déterminer que l'algorithme converge si le gain  $\Phi$  utilisé est inférieur à  $10^{-4}$ . Pour des valeurs de gain supérieures à cette borne, il y a divergence des prédictions. On voit bien à la figure 5-6 que plus le gain est élevé, plus la réponse du modèle est agressive et plus les prédictions sont en avance sur les courbes de référence (symboles x). Cette avance par rapport aux mesures est expliquée à la figure 5-7. De plus, il est logique que l'on retrouve des oscillations sur les courbes

prédites étant donné que nous n'avons pas encore éliminé les oscillations sur les courbes de référence. On remarque cependant que les oscillations diminuent si le gain augmente, d'où l'idée d'un effet stabilisateur introduit par le terme de correction.

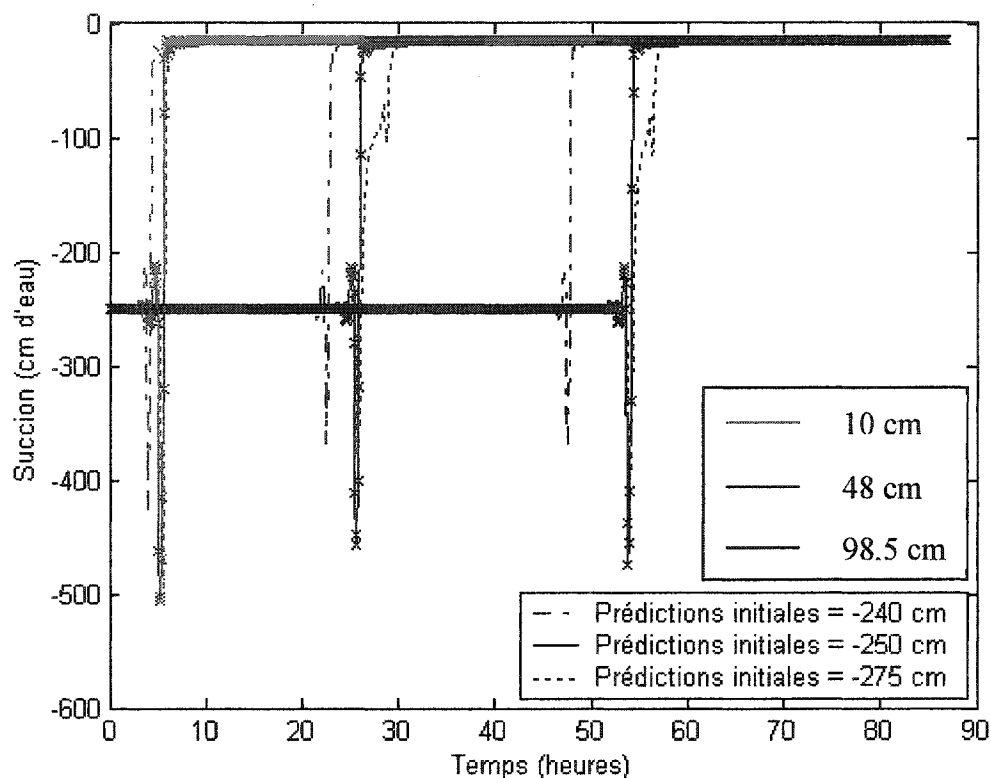


Figure 5-7 Observation de la succion pour  $\Phi = 10^{-4}$  (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MEF).

Avant de débiter une simulation utilisant l'algorithme d'observation de la succion, il importe de choisir des conditions initiales pour le vecteur des prédictions  $\hat{\psi}_w^{(0)}$ . La figure 5-7 présente l'effet de ce choix sur les courbes prédites. Il est clair que si les



prédictions sont initialisées à la même valeur que les mesures, soit à  $-250$  cm d'eau, le terme de correction  $\Phi\left(\psi_w - \hat{\psi}_w\right)$  sera nul en tout temps. Dans ces conditions, il n'y a pas de différence entre les prédictions et les mesures, ces dernières provenant du schéma résolution par la MEF. Il est donc normal que les prédictions initialisées à  $-250$  cm collent parfaitement aux mesures, et ce peu importe le gain utilisé. Si les conditions initiales des prédictions sont plus humides que celles des mesures ( $\hat{\psi}_w^{(0)} = -240$  cm versus  $\psi_w^{(0)} = -250$  cm), le front prédit est en avance par rapport au front de référence. Ceci est imputable au fait que si le sol est plus humide au départ pour le modèle de l'observateur, il est plus facile pour ce dernier de faire passer le front. L'infiltration se déroule donc plus rapidement dans ces conditions. En faisant le raisonnement inverse, il est logique que le front prédit soit en retard sur le front de référence si les conditions initiales des prédictions sont plus sèches que celles des mesures ( $\hat{\psi}_w^{(0)} = -275$  cm versus  $\psi_w^{(0)} = -250$  cm). On remarque aussi que le front prédit dans ces conditions se comportent bizarrement, comme s'il était retardé dans l'atteinte de la succion de consigne  $\hat{\psi}_w^c = -15$  cm en tête de colonne ( $z = 0$ ). Nous reviendrons sur ce point dans la prochaine section.

#### 5.4.2 Mesures générées par la résolution du modèle à l'aide de la MDF

Tel que mentionné précédemment, les résultats de simulation obtenus par Schoefs à l'aide de la MDF sont considérés comme des données expérimentales dans le contexte de cette étude. Les essais effectués à la section précédente ont permis d'identifier un intervalle de gains  $\Phi$  pour lesquels les prédictions sont effectuées sans divergence de l'algorithme. La figure 5-8 présente des simulations pour cet intervalle de gains  $\Phi$ , mais appliqués cette fois à un schéma pour lequel les mesures sont issues d'une résolution par la MDF. On introduit les mesures  $\psi_w$  dans le terme de correction à chaque pas de temps du modèle d'observation ( $\Delta t = 0.1$  heure), mais ces mesures sont toujours générées suite à l'utilisation de pas de temps variables (ode15s) de par la stratégie de résolution de Schoefs. La figure 5-9 montre quant à elle l'effet des conditions initiales  $\hat{\psi}_w^{(0)}$  sur les prédictions. Ces figures n'impliquent toujours que trois positions de capteurs par souci de clarté.

On remarque d'abord sur la figure 5-8 que l'algorithme d'observation se comporte mieux dans ce cas-ci que dans le cas où les mesures proviennent d'une résolution par la MEF. En effet, la position du front d'eau est correctement prédite même si les conditions initiales des prédictions sont plus humides que celles des mesures ( $\hat{\psi}_w^{(0)} = -240$  cm versus  $\psi_w^{(0)} = -250$  cm), ce qui n'était pas le cas à la section précédente (voir figure 5-6). De plus, nous ne retrouvons pas d'oscillations à la base des courbes

prédites. Ceci provient du fait que les mesures issues de la MDF ne comportent pas d'oscillations (contrairement aux mesures issues de la MEF) et que le terme de correction  $\Phi(\psi_w - \hat{\psi}_w)$  introduit un effet stabilisateur sur les prédictions : il leur impose de coller aux mesures à la position du front.

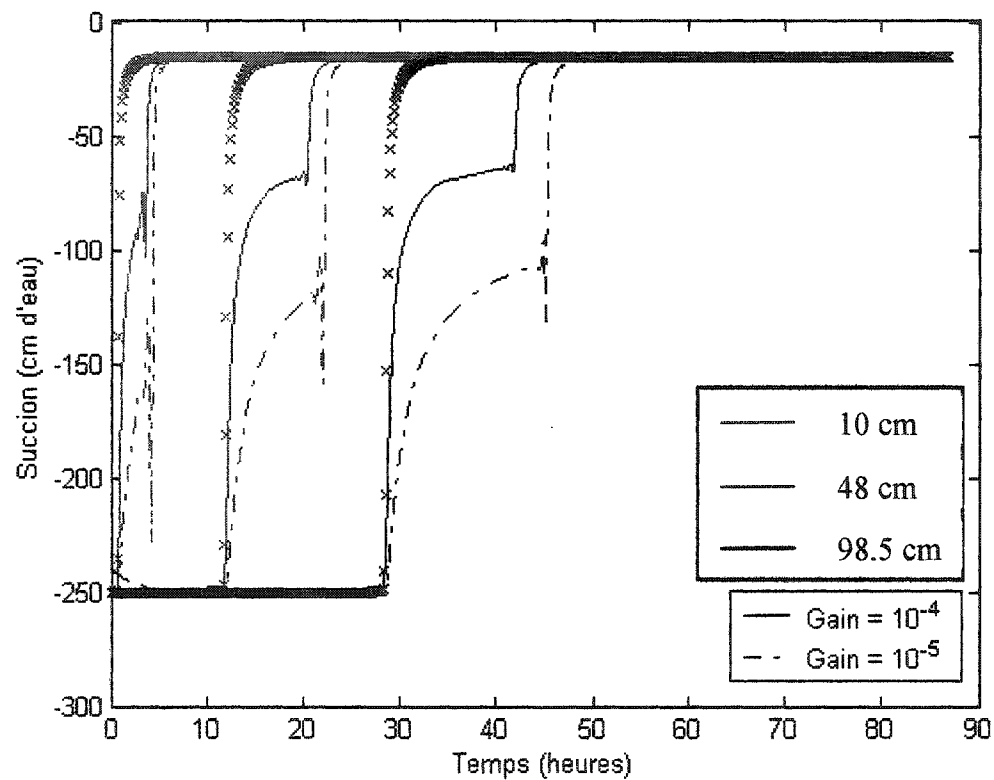


Figure 5-8 Observation de la succion pour  $\hat{\psi}_w^{(0)} = -240$  cm (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MDF).

On observe par contre un phénomène étrange sur les courbes simulées. Bien que la position du front soit correctement prédite et que les oscillations soient éliminées, il semble que le gain soit trop faible pour amener directement le front à la consigne en tête de colonne  $\hat{\psi}_w^c = -15$  cm. Le front prédit subit donc un relâchement, puis une cassure survient à un moment donné, après quoi les prédictions se dirigent vers la succion de consigne. On voit sur la figure 5-8 que plus le gain est élevé, plus les courbes simulées collent aux courbes de référence. Il y a par contre divergence des prédictions si un gain supérieur à  $\Phi = 10^{-4}$  est utilisé pour le terme de correction, alors le relâchement observé sur les courbes prédites ne peut être complètement éliminé par une augmentation de la valeur du gain.

Il semble que le front prédit soit influencé dans sa trajectoire, comme si les prédictions étaient retardées dans leur atteinte de la succion de consigne par une baisse de la vitesse de mouillage. Cette vitesse diminue pendant un moment, puis elle retrouve soudainement sa tendance initiale pour transporter le front à la succion de consigne. Ce phénomène n'est pas observé à la figure 5-6 car les prédictions sont toujours en avance par rapport aux mesures, c'est-à-dire que le front prédit n'est jamais en retard sur le front mesuré. Par contre, on voit à la figure 5-7 que le seul front prédit qui soit légèrement en retard par rapport au front mesuré semble influencé lui aussi par une variation de la vitesse de mouillage. Il y a probablement une explication liée aux mesures pour expliquer ce phénomène, mais cette dernière peut être cachée par des considérations

numériques. En effet, un examen approfondi de la valeur numérique des mesures et des prédictions autour de la cassure qui survient à chaque position n'a pas permis de déterminer de quelle variable cette cassure tire son origine. Peut-être une diminution du pas de temps utilisé pour les simulations devrait-elle être envisagée. On se rappelle que le pas de temps utilisé pour l'algorithme d'observation est fixé à 0.1 heure, mais que l'intégrateur d'ordre variable ode15s utilise le pas de temps qui lui convient pour générer les mesures.

Par ailleurs, la figure 5-9 montre qu'une modification des conditions initiales des prédictions n'a qu'un faible effet sur les courbes simulées. En effet, la position du front est correctement prédite pour chaque ensemble de conditions initiales, que celles-ci soient plus humides ou plus sèches que les conditions initiales des mesures. La seule différence réside en une augmentation du délai avant que le front prédit ne se dirige vers la succion de consigne si les prédictions initiales sont plus sèches (plus « négatives »).

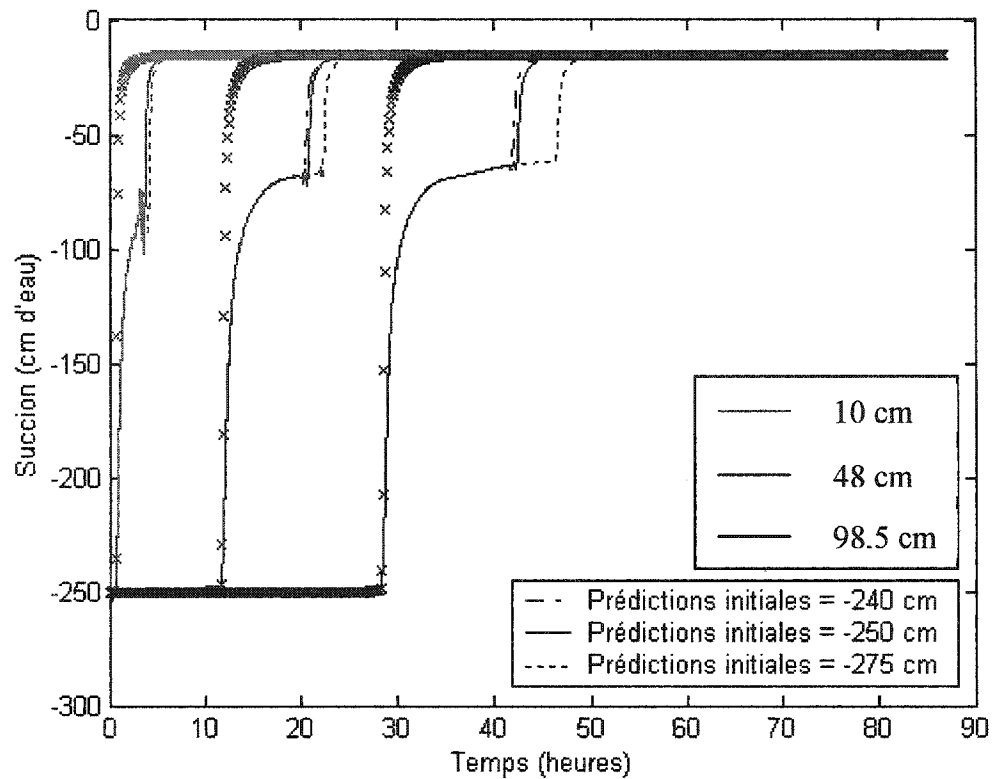


Figure 5-9 Observation de la succion pour  $\Phi = 10^{-4}$  (mesures x provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MDF).

#### 5.4.3 Conclusions

Bref, les résultats de l'utilisation d'un algorithme d'observation de la succion  $\hat{\psi}_w$  construit à l'aide de la MEF sont intéressants. Nous avons d'abord déterminé un intervalle de gains pour lesquels les simulations convergent. Si les mesures proviennent d'un schéma de résolution suivant la MEF, la position du front prédit est sensible aux

conditions initiales des prédictions. Par contre, si les mesures proviennent de simulations réalisées avec la MDF, la position du front est correctement prédite, et ce peu importe les conditions initiales des prédictions. De plus, les profils de succion observés ne comportent plus d'oscillations à leur base dans ce cas-ci. Le seul bémol est le phénomène de cassure observé sur les courbes simulées lorsque le front prédit n'est pas en avance par rapport au front de référence.

La figure suivante présente les résultats d'observation de la succion  $\hat{\psi}_w$  obtenus avec un algorithme construit selon une discrétisation du modèle par la MDF. Il s'agit des résultats obtenus par Schoefs (2002) pour une stratégie de résolution des équations du modèle estimateur/observateur en  $\psi_w$ . Les couleurs utilisées pour cette représentation graphique ne suivent plus celles de la légende présentée au début de ce chapitre (figure 5-1). Il s'agit simplement de l'allure du front au début de l'infiltration.

Bien que l'équation forte de l'observateur ne soit pas la même dans cas-ci que dans le cas d'une stratégie de résolution du modèle en  $\hat{\psi}_w$ , il est important de comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes pour bien voir que nous améliorons l'allure des profils de succion prédits.

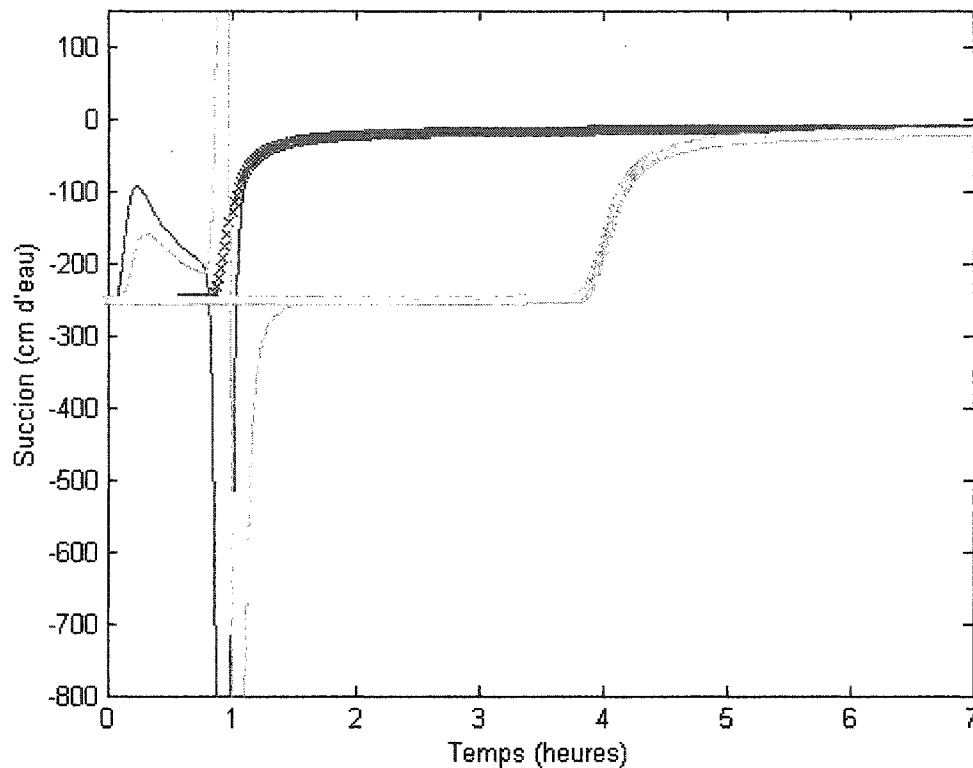


Figure 5-10 Observation de la succion avec l'algorithme de Schoefs (2002) pour

$$\psi_w^{(0)} = \hat{\psi}_w^{(0)} = -250 \text{ cm d'eau.}$$

On voit bien que les prédictions (lignes continues) oscillent fortement à la base du front d'eau, lequel est représenté à deux positions (symboles x). On constate que, dans le cas de la figure 5-10, les oscillations ne sont pas imputables au caractère convectif de l'équation de Richards. Il ressort donc que ces oscillations ne peuvent pas être atténuées ou éliminées par l'utilisation de stratagèmes numériques tels une méthode d'upwinding ou une diminution de la taille de maille.



Ces résultats montrent que la méthode utilisée dans ce projet est prometteuse pour prédire la succion  $\hat{\psi}_w$  en régime transitoire. Lorsque les mesures utilisées au niveau du terme de correction du modèle présenté en (4.5) ne comportent pas d'oscillations numériques, nous ne retrouvons pas d'oscillations à la base du front prédit contrairement aux résultats présentés à la figure 5-10. Ceci provient du fait que notre stratégie implique la résolution du modèle en  $\hat{\psi}_w$  plutôt qu'en  $\psi_w$ . De cette manière, notre domaine de résolution comporte beaucoup plus de points que celui utilisé par Schoefs dans sa méthodologie, laquelle ne faisait intervenir que les huit points de mesure. Il ressort donc que l'utilisation d'un maillage fin pour résoudre le modèle en  $\hat{\psi}_w$  avec l'ajout du terme de correction  $\Phi\left(\psi_w - \hat{\psi}_w\right)$  aux nœuds qui correspondent à une position de capteur de pression constitue une amélioration dans la manière de prédire une infiltration.

### 5.5 Estimation des paramètres du modèle

Un algorithme pour estimer les paramètres de l'infiltration a été construit et testé sous plusieurs conditions. L'algorithme suit la structure présentée à la page 43 (section 4.1). Bien que les résultats de l'algorithme d'observation (section 5.4) sont intéressants et plutôt concluants, il semble qu'il est beaucoup plus ardu d'obtenir des résultats similaires si la partie estimation est intégrée au problème. Lors de la résolution de

l'équation d'observation (4.5) dans la section précédente, les paramètres  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$

n'étaient pas estimés,  $\hat{\theta}_1 = K_w(\hat{\psi}_w)$  et  $\hat{\theta}_2 = \frac{\partial K_w(\hat{\psi}_w)}{\partial z}$  étant utilisés dans le modèle.

Lorsque vient le temps d'estimer ces paramètres, il suffit d'y aller d'une valeur initiale

constante pour débiter les simulations. On a donc  $\hat{\theta}_1^{(0),(n)} = Y_1$  et  $\hat{\theta}_2^{(0),(n)} = Y_2$  pour entrer

dans l'algorithme d'estimation,  $n$  représentant un capteur donné et  $Y_1, Y_2$  des constantes

quelconques. Histoire de voir comment le modèle se comporte, nous avons conservé les

expressions  $\hat{\theta}_1 = K_w(\hat{\psi}_w)$  et  $\hat{\theta}_2 = \frac{\partial K_w(\hat{\psi}_w)}{\partial z}$  telles quelles aux coordonnées  $z$  qui ne

correspondent pas à une position de capteur de pression.

Malgré ce fait sensé nous faciliter la tâche, il semble que le choix des constantes  $Y_1$  et  $Y_2$

ne soit pas simple du tout, car l'algorithme d'estimation utilisé n'a jamais donné de

résultats concluants. Soit les succions observées  $\hat{\psi}_w$  divergent complètement pour des

gains qui assuraient la convergence à la section précédente, soit l'allure dans le temps

des paramètres estimés ne correspond pas du tout à la réalité. La figure 5-11 illustre ce

que nous obtenons comme estimation des paramètres  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  à la position  $z = 48$  cm

pour un des nombreux cas simulés. Les mesures  $\psi_w$  des termes de correction ainsi que

les profils de  $K_w$  et de  $\frac{dK_w}{dz}$  dans le temps proviennent de la simulation de l'équation de

Richards selon la MEF. Nous avons choisi la MEF pour générer les mesures parce qu'il nous a semblé que cela faciliterait l'obtention de profils d'estimation intéressants, les prédictions et les mesures étant issues du même schéma de résolution. Les gains  $\Phi$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  utilisés dans le modèle estimateurs/observateur sont constants.

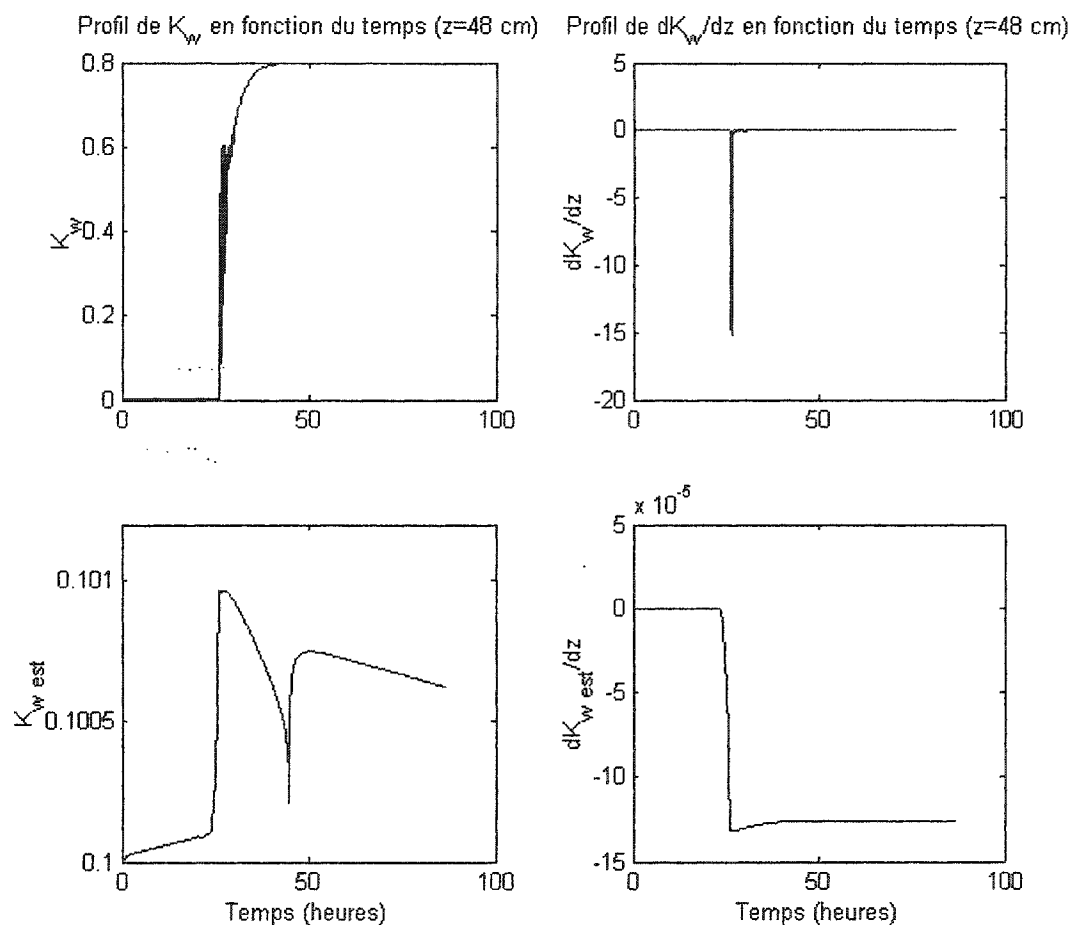


Figure 5-11 Estimation de paramètres (mesures provenant de la résolution de l'équation de Richards par la MEF avec  $\psi_w^{(0)} = -250$  cm).

Cette figure nous amène à penser que la tentative d'estimer les paramètres du modèle restera vaine tant que les oscillations qui viennent polluer les résultats de simulation ne seront pas éliminées. On voit bien que le profil dans le temps de la conductivité hydraulique non saturée  $K_w$  (coin supérieur gauche de la figure 5-11) est affectée par les oscillations à la base du front d'eau. Lorsque le modèle d'estimation détecte le changement dans la valeur de ce paramètre, il réagit dans le bon sens, mais il est mal informé étant donné les oscillations et il se perd en cours de route. De plus, nous sommes perplexes quant à la possibilité que le modèle d'estimation soit en mesure de décrire le paramètre  $\frac{\partial K_w}{\partial z}$  considérant son allure dans le temps (coin supérieur droit de la figure 5-11). De fait, ce pic prononcé cause probablement bien des soucis à l'algorithme, lequel n'a pas le temps de le détecter correctement. Par conséquent, divers essais ont été tentés afin d'améliorer les résultats de l'estimation de paramètres, soit :

- Changement des conditions initiales  $\psi_w^{(0)}$  de l'infiltration afin d'éliminer les oscillations à la base des fronts de référence (mesures);
- Variation des gains  $\Phi$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ;
- Estimation d'un seul paramètre :  $\hat{\theta}_1 = K_w \left( \hat{\psi}_w \right)$ ;
- Estimation d'un paramètre constant sur toute la colonne d'infiltration : conductivité hydraulique à saturation  $K_{sat}$ .

Malgré le potentiel de ces idées, surtout en ce qui concerne l'estimation du paramètre constant  $K_{sat}$ , aucune n'a mené à une amélioration notable des résultats d'estimation. Comme nous avons tenté de changer les conditions initiales  $\psi_w^{(0)}$  de l'infiltration afin d'éliminer les oscillations à la base des fronts de référence et que cela n'a pas permis d'améliorer les résultats d'estimation, nous pensons que l'utilisation de mesures générées par la MDF ne permettrait pas d'améliorer la performance du capteur-logiciel. C'est donc dire que, pour l'instant, nous ne sommes pas en mesure d'estimer correctement les paramètres de l'infiltration, et ce quelle que soit la stratégie utilisée.

Il est évident qu'un choix judicieux des gains  $\Phi$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  du modèle estimateurs/observateur est primordial pour la réussite de notre projet. Les résultats obtenus jusqu'à présent montrent que ce n'est pas en y allant par essais et erreurs dans le choix de ces gains et en utilisant des valeurs constantes que nous allons obtenir des profils satisfaisants pour l'estimation des paramètres de l'infiltration. Il importe maintenant de trouver une manière systématique de choisir les gains du modèle.

Dans la thèse de Schoefs (2002), les gains de son modèle estimateur/observateur sont choisis selon une analyse de convergence basée sur l'étude de la stabilité du système d'erreurs présenté à la page suivante.

$$\begin{aligned} e &= \psi_w - \hat{\psi}_w \\ \tilde{K}_w &= K_w(\psi_w) - \hat{K}_w \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le but de cette analyse est de faire dépendre les gains des états. On se souvient que la forme discrétisée de l'équation de Richards selon la MDF permet l'identification directe d'un régresseur pour le paramètre de la conductivité hydraulique non saturée. Il s'agit donc d'estimer un seul paramètre dans ce cas-ci. De plus, tel que mentionné dans la section 4.1, Schoefs utilise la valeur mesurée de la succion  $\psi_w$  plutôt que sa valeur prédite  $\hat{\psi}_w$  pour résoudre les équations de son modèle. Cette utilisation, bien que nuisible au niveau de la justesse d'approximation des dérivées du modèle, s'avère utile au niveau de l'étude de la stabilité du système d'erreur décrit en (5.8). En effet, Schoefs obtient des relations plutôt simples et faciles à implanter pour le réglage des gains de son système. Nous renvoyons le lecteur à la thèse de Schoefs pour les détails de son développement.

L'application de cette technique pour identifier les gains du modèle estimateurs/observateur qui fait l'objet de ce projet est par contre beaucoup plus ardue. On se rappelle que nous nous retrouvons dans l'obligation de considérer un modèle à deux paramètres de par l'utilisation de la MEF. On se retrouve alors avec une analyse de convergence basée sur l'étude de la stabilité du système d'erreurs qui suit :

$$\begin{aligned}
e_1 &= \tilde{\psi}_w = \psi_w - \hat{\psi}_w \\
e_2 &= \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1 \\
e_3 &= \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Outre le fait que nous tentions d'estimer deux paramètres plutôt qu'un seul, la difficulté majeure à ce stade provient de l'utilisation de la valeur prédite de la succion  $\hat{\psi}_w$  plutôt que sa valeur mesurée  $\psi_w$  dans les équations du modèle. Cette stratégie complexifie l'analyse et l'interprétation de ses résultats. En effet, voici la comparaison de ce que nous obtenons en effectuant l'analyse de la convergence pour un modèle résolu en  $\hat{\psi}_w$  par rapport à un modèle résolu en  $\psi_w$ .

Modèle en  $\hat{\psi}_w$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} &= \frac{1}{\hat{C}_w} \left[ \hat{\theta}_1 \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2} + \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \\
&\quad + \Phi \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \\
\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} &= \Gamma_1 \frac{1}{\frac{1}{\hat{C}_w} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2}} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \\
\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial t} &= \Gamma_2 \frac{1}{\frac{1}{\hat{C}_w} \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right)} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right)
\end{aligned}$$

Modèle en  $\psi_w$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial t} &= \frac{1}{C_w} \left[ \hat{\theta}_1 \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} + \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \\
&\quad + \Phi \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \\
\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} &= \Gamma_1 \frac{1}{\frac{1}{C_w} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2}} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right) \\
\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial t} &= \Gamma_2 \frac{1}{\frac{1}{C_w} \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right)} \left( \psi_w - \hat{\psi}_w \right)
\end{aligned}$$

Analyse de la convergence basée sur l'étude de la stabilité du système d'erreurs :

$$\begin{aligned} e_1 &= \tilde{\psi}_w = \psi_w - \hat{\psi}_w \\ e_2 &= \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1 \\ e_3 &= \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_w \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = A(\psi_w) \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_w \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} + V(\psi_w)$$

L'analyse de convergence repose sur la stabilité de la matrice  $A(\psi_w)$ . Cependant, des conditions doivent être imposées sur le vecteur  $V(\psi_w)$ . Comme le but de l'exercice est simplement d'identifier des relations facilitant le réglage des gains du modèle, ces conditions ne sont pas explicitées. Il importe par contre de mentionner que nous sommes loin d'effectuer une étude de la stabilité complète du modèle.

Modèle en  $\hat{\psi}_w$  :

$$A(\psi_w) = \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & 0 \\ \frac{-\Gamma_1 \hat{C}_w}{\partial^2 \hat{\psi}_w / \partial z^2} & 0 & 0 \\ \frac{-\Gamma_2 \hat{C}_w}{\left( \partial \hat{\psi}_w / \partial z - 1 \right)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$



$$V(\psi_w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_w} \left[ \theta_1 \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} + \theta_2 \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \right] - \frac{1}{\hat{C}_w} \left[ \hat{\theta}_1 \frac{\partial^2 \hat{\psi}_w}{\partial z^2} + \hat{\theta}_2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}_w}{\partial z} - 1 \right) \right] \\ \partial \theta_1 / \partial t \\ \partial \theta_2 / \partial t \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\lambda I - A(\psi_w) = \begin{bmatrix} \lambda + \Phi & 0 & 0 \\ \frac{\Gamma_1 \hat{C}_w}{\partial^2 \hat{\psi}_w / \partial z^2} & \lambda & 0 \\ \frac{\Gamma_2 \hat{C}_w}{\left( \partial \hat{\psi}_w / \partial z - 1 \right)} & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Modèle en  $\psi_w$  :

$$A(\psi_w) = \begin{bmatrix} -\Phi & \frac{1}{C_w} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} & \frac{1}{C_w} \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \\ \frac{-\Gamma_1 C_w}{\partial^2 \psi_w / \partial z^2} & 0 & 0 \\ \frac{-\Gamma_2 \hat{C}_w}{\left( \partial \psi_w / \partial z - 1 \right)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$V(\psi_w) = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial\theta_1/\partial t \\ \partial\theta_2/\partial t \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\lambda I - A(\psi_w) = \begin{bmatrix} \lambda + \Phi & -\frac{1}{C_w} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} & -\frac{1}{C_w} \left( \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - 1 \right) \\ \frac{\Gamma_1 C_w}{\partial^2 \psi_w / \partial z^2} & \lambda & 0 \\ \frac{\Gamma_2 \hat{C}_w}{(\partial \psi_w / \partial z - 1)} & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Le polynôme caractéristique du système nous permettant de dégager des relations pour le réglage des gains est donné dans les deux cas par le déterminant suivant :

$$\det[\lambda I - A(\psi_w)] = 0 \quad (5.16)$$

On obtient donc les polynômes caractéristiques qui suivent :

Modèle en  $\hat{\psi}_w$  :

$$\lambda^3 + \Phi \lambda^2 = 0$$

Modèle en  $\psi_w$  :

$$\lambda^3 + \Phi \lambda^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \lambda = 0$$

On voit bien que le polynôme caractéristique découlant de l'analyse de convergence du modèle résolu en  $\hat{\psi}_w$  ne comporte aucune information sur les gains  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . De fait, toute l'information sur les paramètres  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  se retrouve dans le vecteur  $V(\psi_w)$  présenté en (5.11) et nous ne pouvons pas l'utiliser. Par contre, le polynôme caractéristique correspondant au modèle résolu en  $\psi_w$  comporte toute l'information voulue et il peut servir à identifier des relations pour exprimer les gains. Il est donc clair que la stratégie de résolution du modèle en  $\hat{\psi}_w$  rend improbable l'application de la technique d'analyse de convergence basée sur l'étude de la stabilité d'un système d'erreurs pour identifier des relations pour le réglage des gains de notre modèle et pour jouer sur le taux de convergence.

## 6 CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET RECOMMANDATIONS

### 6.1 Conclusions

Le but de cette étude était d'améliorer la performance en régime transitoire du capteur-logiciel basé sur la structure d'estimateur/observateur construit par Schoefs (2002) pour l'estimation en temps réel de la conductivité hydraulique non saturé. L'objectif général pour parvenir à cette fin consistait en l'utilisation d'une méthode numérique différente de celle utilisée par Schoefs pour la résolution du modèle de l'infiltration et pour la construction du modèle d'estimateurs/observateur.

La méthode des éléments finis (MEF), reconnue pour sa flexibilité et pour son adaptabilité, est donc utilisée dans ce projet pour remplacer la méthode des différences finies (MDF). L'équation de Richards est utilisée pour décrire l'infiltration et la stratégie de construction du modèle estimateur/observateur (ou capteur-logiciel) suit la théorie des systèmes adaptatifs.

Dans un premier temps, il ressort que les résultats de simulation obtenus avec la MEF ne pourront correspondre aux résultats de simulation obtenus avec la MDF que si le pas de temps et la taille de maille utilisés dans la résolution par éléments finis sont diminués conjointement. En effet, une analogie entre l'équation de Richards et l'équation de

convection-diffusion montre que la taille de maille joue un rôle important dans les simulations, influençant directement la valeur des nombres de Peclet et de Courant locaux relatifs à l'infiltration. Ceci implique qu'une diminution du pas de temps ne peut pas à elle seule assurer la stabilité des résultats. Bref, lorsqu'une méthode discrète est utilisée pour résoudre numériquement l'équation de Richards, l'expression du nombre de Peclet local montre qu'une diminution du pas de temps ne garantit pas la stabilité des résultats. À cette fin, la taille de maille doit aussi être considérée.

Par ailleurs, d'importantes oscillations numériques sont présentes à la base du front d'eau. Comme nous ne pouvons pas modifier les conditions initiales de l'infiltration, nous pouvons procéder de deux manières pour éliminer ces oscillations: par upwinding ou par diminution de la taille de maille, ce qui revient à diminuer le nombre de Peclet local. Cependant, ces deux stratégies comportent des inconvénients majeurs lorsque appliquées à l'équation de Richards : expression implicite et complexe à interpréter de la vitesse de mouillage pour l'upwinding et augmentation importante du temps de calcul de l'ordinateur pour la diminution de la taille de maille. De plus, il semble que le nombre de Peclet à la position du front d'eau soit trop élevé dans les simulations présentées pour qu'une diminution de la taille de maille puisse contrôler la stabilité de l'infiltration. Ceci est imputable à la nature très sèche du sol au début de l'infiltration.

Dans un second temps, une stratégie basée sur la MEF pour construire un algorithme d'estimation/observation (capteur-logiciel) appliqué à l'équation de Richards comporte

des avantages et des inconvénients par rapport à une stratégie basée sur la MDF. En effet, la méthodologie utilisée dans ce projet est intéressante pour prédire la succion  $\hat{\psi}_w$  en régime transitoire. Si nous nous affranchissons de la présence d'importantes oscillations à la base du front d'eau prédit, c'est que nous résolvons le modèle en  $\hat{\psi}_w$  plutôt qu'en  $\psi_w$ . De cette manière, le domaine de résolution comporte beaucoup plus de points que celui utilisé par Schoefs dans sa méthode, laquelle ne faisait intervenir que les huit points de mesure.

Les inconvénients résident quant à eux au niveau de l'estimation de paramètres. D'abord, nous n'avons pas réussi à obtenir des profils concluants pour l'estimation de paramètres. Nous avons utilisé des gains constants pour toutes les simulations. Par la suite, nous avons tenté d'améliorer l'allure des courbes de différentes manières, soit en éliminant les oscillations à la base du front, en estimant un seul paramètre (la conductivité hydraulique non saturée) et en estimant un paramètre constant (la conductivité hydraulique à saturation). Cependant, aucune de ces tentatives n'a donné de résultats intéressants.

Considérant ces faits, nous nous sommes penchés sur des pistes d'identification systématique des gains du modèle. À ce niveau, il ressort que l'utilisation de notre stratégie basée sur la résolution du modèle en  $\hat{\psi}_w$  complexifie grandement l'analyse de convergence basée sur l'étude de la stabilité d'un système d'erreurs telle qu'utilisée par

Schoefs pour identifier des relations facilitant le réglage des gains de son modèle. D'abord, l'emploi de la MEF implique que nous devons tenter d'estimer deux paramètres plutôt qu'un seul, ce qui ne simplifie pas l'analyse. Ce qui vient brouiller les pistes par la suite est l'utilisation de la valeur prédite de la succion  $\hat{\psi}_w$  plutôt que sa valeur mesurée  $\psi_w$  dans les équations du modèle. De fait, le polynôme caractéristique découlant de l'analyse de convergence du modèle résolu en  $\hat{\psi}_w$  ne comporte pas d'information sur les gains  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Ainsi aucune relation facilitant le réglage des gains du modèle d'estimation et permettant de jouer sur le taux de convergence ne peut-elle être dégagée de cette analyse. . .

En définitive, l'utilisation de la MEF plutôt que la MDF pour résoudre l'équation de Richards et pour simuler un modèle d'estimateur/observateur (capteur-logiciel) ne permet pas à ce jour d'améliorer la performance du capteur-logiciel construit par Schoefs pour l'estimation en temps réel de la conductivité hydraulique non saturée. La résolution de l'équation de Richards est plus complexe et moins intuitive avec notre stratégie impliquant une méthode discrète (MEF pour le schéma spatial et discrétisation d'Euler implicite pour le temps) qu'avec celle de Schoefs (méthode semi-discrète : MDF pour l'espace et intégrateur d'ordre variable pour le temps). Par contre, nous améliorons grandement les résultats pour l'observation de la succion  $\hat{\psi}_w$ , mais cette amélioration provient davantage d'un changement dans la manière de résoudre le modèle (en  $\hat{\psi}_w$

plutôt qu'en  $\psi_w$ ) que de l'utilisation de la MEF. Bref, au terme de ce projet, nous ne pouvons préconiser une méthode numérique plutôt qu'une autre pour estimer la conductivité hydraulique non saturée.

## 6.2 Recommandations

Suite aux travaux réalisés dans le cadre de cette étude, certaines recommandations peuvent être formulées afin que de nouvelles pistes de recherche soient suivies.

D'un point de vue expérimental, il serait intéressant d'effectuer les prochaines expériences en utilisant un sol plus humide au départ. Ceci faciliterait grandement les simulations de l'équation de Richards étant donné que le gradient de succion  $\psi_w$  serait moins prononcé lors de l'infiltration.

De plus, il importe de trouver un moyen d'éliminer les oscillations qui polluent les résultats de simulation de l'équation de Richards lorsqu'une méthode discrète (MEF + Euler implicite) est utilisée et que les CI de l'infiltration sont de nature très sèche. Pour ce faire, il serait intéressant de se pencher davantage sur la notion de vitesse de mouillage. On se souvient que cette vitesse  $v$  est implicite dans l'équation de Richards usuelle et qu'elle est difficile à utiliser numériquement dans l'équation de Richards modifiée. Cependant, il pourrait être intéressant de trouver une expression simple pour



approximer la vitesse de mouillage. L'expression utilisée devrait avoir le même comportement dans le temps que le paramètre  $v$ . Nous pourrions ainsi dégager beaucoup d'information sur la nature de l'écoulement et, plus important encore, nous serions à même d'utiliser une méthode d'upwinding de type SUPG afin de régler le problème des oscillations à la base du front d'eau.

Dans le même ordre d'idées, il serait intéressant de simuler l'équation de Richards par rapport à la charge hydraulique  $\phi = \psi_w - z$  plutôt que par rapport à la succion  $\psi_w$  tel que proposé par Eymard et al. (2001). Il semblerait en effet que cette utilisation rende inutile l'ajout d'upwinding au schéma de résolution.

Par ailleurs, les recherches à venir devraient se pencher sur l'étude d'une technique pour identifier de manière systématique des relations pour faciliter le réglage des gains  $\Phi$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  du modèle d'estimateurs/observateur à deux paramètres. Par exemple, le réglage de ces gains en fonction des nombre de Peclet et de Courant pourrait être envisagé.

Finalement, il peut s'avérer intéressant de tenter l'estimation des paramètres fixes du modèle comme les constantes  $\alpha$ ,  $m$  et  $n$ . Bien que nous serions toujours dépendants des relations empiriques de van Genuchten-Mualem et que nous devrions employer des techniques de régression non linéaire, nous pourrions en dire long sur la nature d'un sol si nous pouvions estimer ces constantes. En effet, elles sont typiques d'un sol donné et

elles ne varient pas au cours d'une infiltration. Aussi semble-il plus facile d'estimer des paramètres fixes que des paramètres qui varient dans le temps et dans l'espace. Nous avons fait des essais en ce sens, soit d'estimer la conductivité hydraulique à saturation  $K_{sat}$ , mais la nature peu concluante des premiers résultats obtenus nous ont fait abandonner cette stratégie. Cependant, si nous utilisons des relations pour le réglage des gains du modèle, il est probable que nous obtenions enfin un comportement intéressant du capteur-logiciel.

## RÉFÉRENCES

Allen, M.B. et Murphy, C.L. (1986). "A Finite-element Collocation Method for Variably Saturated Flow in Two Space Dimensions." Water Resources Research **22**(11) : 1537-1542.

Bastin, G. et Dochain, D. (1990). On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors. Amsterdam, Elsevier.

Bertrand, F. (1995). Modélisation tridimensionnelle du procédé de malaxage à mouvement planétaire de fluides visqueux rhéologiquement complexes. Thèse de doctorat. Lorraine, Institut National Polytechnique de Lorraine.

Bertrand, F. (2002). Méthode d'éléments finis en génie chimique. Notes de cours. Départements de génie chimique. Montréal, École Polytechnique de Montréal.

Bitterlich, S. et Knabner, P. (2002). "An Efficient Method for Solving an Inverse Problem for the Richards Equation." J. Comput. Appl. Math. **147**(1): 153-173.

Boulding, J.R. (1995). Practical Handbook of Soil, Vadose Zone, and Groundwater Contamination – Assessment, Prevention, and Remediation. Boca Raton, CRC Press.

Brooks, A.N. et Hughes, T.J.R. (1982). "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations." Comput. Methods Appl. Mechanics & Engr. **32** : 199-259.

Celia, M.A., Ahuja, L.R. et Pinder, G.F. (1987). "Orthogonal Collocation and Alternating-direction Procedures for Unsaturated Flow Problems." Adv. Water Resources **10**: 178-187.

Celia, M.A., Bouloutas, E.T. et Zarba, R.L. (1990). "A General Mass-conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation." Water Resources Research **26**(7) : 1483-1496.

Cooley, R.L., (1983). "Some New Procedures for Numerical Solution of Variably Saturated Flow Problems." Water Resources Research **19**(5) : 1271-1285.

Dochain, D. (2001). "State Observation and Adaptive Linearizing Control for Distributed Parameter (bio)Chemical Reactors." Int. J. Adapt. Control Signal Process. **15**: 633-653.

Eymard, R., Gutnic, M. et Hilhorst, D. (1999). "The Finite Volume Method for Richards Equation." Computational Geosciences **3**: 259-294.

Eymard, R., Gallouet, T., Herbin, R., Gutnic, M. et Hilhorst, D. (2001). "Approximation by the Finite Volume Method of an Elliptic-parabolic Equation Arising in Environmental Studies." Math. Models & Methods in Appl. Sciences **11**(9): 1505-1528.

El-Kadi, A.I. et Ling, G. (1993). "The Courant and Peclet Number Criteria for the Numerical Solution of the Richards Equation." Water Resources Research **29**(10): 3485-3494.

Fortin, A. et Garon, A. (2000). Les éléments finis : de la théorie à la pratique. Notes de cours. Départements de génie mécanique. Montréal, École Polytechnique de Montréal.

Ghidaoui, M.S. et Prasad, K.S.H. (2000). "A Priori Identifiability of Unsaturated Soil Parameters." J. Irrigation & Drainage Engr. **126**(3): 163-171.

Gottardi, G. et Venutelli, M. (1993). "Richards: Computer Program for the Numerical Simulation of One-dimensional Infiltration into Unsaturated Soil." Computer & Geosciences **19**(9): 1239-1266.

Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P.J. et Vachaud, G. (1977). "A Comparison of Numerical Simulation Models for One-dimensional Infiltration." Soil Sci. Soc. Am. J. **41**: 285-294.

Hayhoe, H.N. (1978). "Study of the Relative Efficiency of Finite Difference and Galerkin Techniques for Modeling Soil-water Transfer." Water Resources Research **14**(1): 97-102.

Jacques, D., Simunek, J., Timmerman, A. et Feyen, J. (2002). "Calibration of Richards and Convection-dispersion Equations to Field-scale Water Flow and Solute Transport under Rainfall Conditions." J. Hydrology **259**: 15-31.

Ju, S.-H. (1994). Properties of Funnel-type Preferential Flow and its Influence on Contaminant Transport, Sampling and Modelling. Thèse de doctorat. Madison, Université du Wisconsin.

Ju, S.-H. et Kung, K.-J.S. (1997). "Mass Types, Element Orders and Solution Schemes for the Richards Equation." Computer & Geosciences **23**(2): 175-187.

Lehmann, F. et Ackerer, P. (1997). "Determining Soil Hydraulic Properties by Inverse Method in One-dimensional Unsaturated Flow." J. Environ. Qual. **26**: 76-81.

Letha, J. et Elango, K. (1994). "Simulation of Mildly Unsaturated Flow." J. Hydrology **154**: 1-17.

Mangold, M., Lauschke, G., Schaffner, J., Zeitz, M. et Ernst-Dieter, G. (1994). "State and Parameter Estimation for Adsorption Columns by Nonlinear Distributed Parameter State Observers." J. Process Control **4**(3): 163-172.

Milly, P.C.D. (1985). "A Mass-conservative Procedure for Time-stepping in Models of Unsaturated Flow." Adv. Water Resources **8**: 32-36.

Milly, P.C.D. (1988). "Advances in the Modelling of Water in the Unsaturated Zone." Transp. Porous Media **3**: 491-518.

Mualem, Y. (1986). Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils: Prediction and Formulas. Methods of Soil Analysis. Part 1: Physical and Mineralogical Methods. K.A. Madison, American Society of Agronomy: 799-823.

Neuman, S.P. (1973). "Saturated-unsaturated Seepage by Finite Elements." J. Hydraulics Div., Am. Soc. Civil Engr. **99**: 2233-2250.

Nielsen, D.R., Biggar, J.W. et Erh, K.T. (1973). "Spatial Variability of Field-measured Soil-water Properties." Hilgardia **42**: 215-260.

Nihtila, M.T., Tervo, J. et Kaipio, J.P. (1997). "Simulation of a Nonlinear Distributed Parameter Bioreactor by FEM Approach." Simulation Practice & Theory **5**: 199-216.

Nyer, E.K. (1992). Practical Techniques for Groundwater and Soil Remediation. Boca Raton, CRC Press.

Perrier, M. et Dochain, D. (1993). "Evaluation of Control Strategies for Anaerobic Digestion Processes." Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing 7: 309-321.

Perrier, M., Feyerherm, S., Ferreira, E.C. et Dochain, D. (2000). "Tuning of Observer-based Estimators: Theory and Application to the On-line Estimation of Kinetic Parameters." Control Engineering Practice 8: 377-388.

Pomerleau, Y. (1990). Modélisation et contrôle d'un procédé fed-batch de culture des levures à pain *Saccharomyces cerevisiae*. Thèse de doctorat. Département de génie chimique. Montréal, École Polytechnique de Montréal.

Richards, L.A. (1931). "Capillary conduction through porous mediums." Physics 1: 313-318.

Ross, P.J. et Parlange, J.-Y. (1994). "Investigation of a Method for Deriving Unsaturated Soil Hydraulic Properties from Water Content Profiles." Soil Science 157: 335-340.

Shao, M. et Horton, R. (1998). "Integral Method for Estimating Soil Hydraulic Properties." Soil Sci. Soc. Am. J. 62: 585-592.



Schoefs, O. (2002). Modélisation et observation des procédés de biodégradation d'un polluant dans un sol non saturé. Thèse de doctorat. Département de génie chimique. Montréal, École Polytechnique de Montréal.

Schoefs, O., Perrier, M., Dochain, D. et Samson, R. (2003). "On-line Estimation of Biodegradation in an Unsaturated Soil." Bioprocess & Biosystems Engr. (accepté avec révisions mineures).

Sorin Pop, I. (2002). "Error Estimates for a Time Discretization Method for the Richards Equation." Computational Geosciences **6**: 141-160.

Suthersan, S.S. (1997). Remediation Engineering: Design Concepts. Boca Raton, CRC Press.

Szymkiewicz, A., Derrier, A. et Lewandowska, J. (2002). Modélisation de la propagation d'un front d'eau dans un sol non saturé par une méthode semi-discrète. Séminaire, Domaine Universitaire – St. Martin d'Hères.

Thomas, H.R. et Rees, S.W. (1993). "Numerical Simulation of Seasonal Soil Drying in an Unsaturated Clay Soil." Intern. J. Numer. Anal. Methods in Geomechanics **17**: 119-132.

van Dam, J.C. et Feddes, R.A. (2000). "Numerical Simulation of Infiltration, Evaporation and Shallow Groundwater Levels with the Richards Equation." J. Hydrology **233**: 72-85.

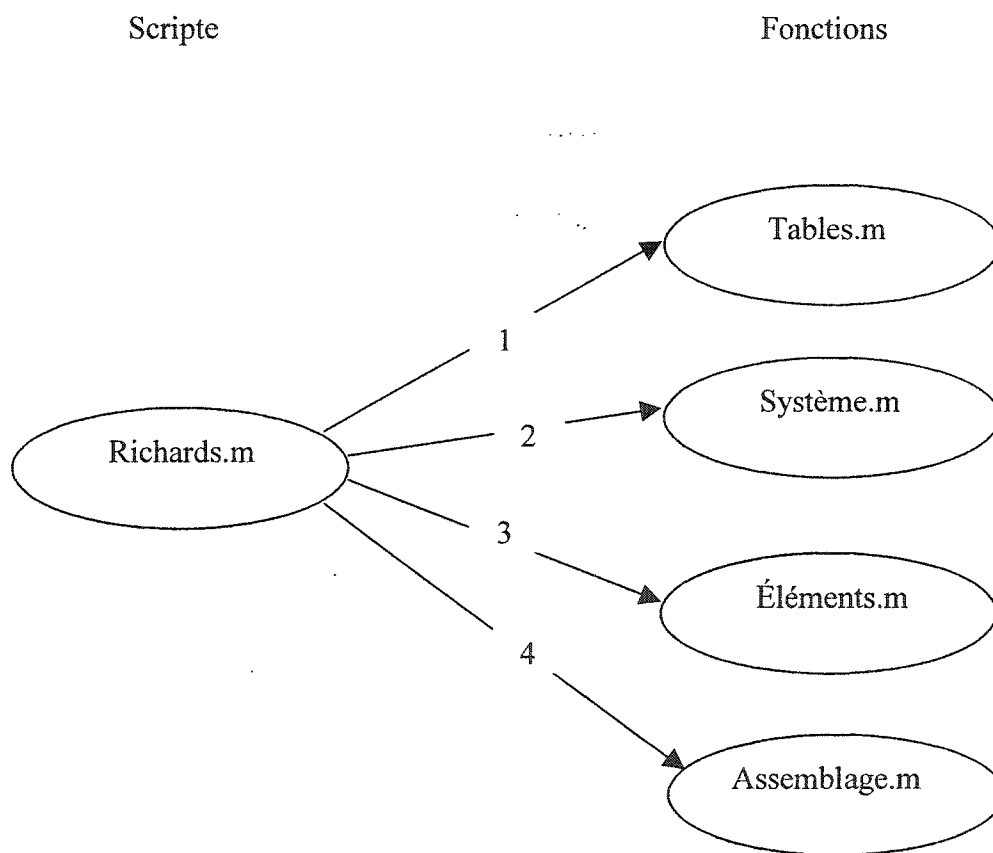
van Genuchten, M.T. (1980). "A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils." Soil Sci. Soc. Am. J. **44**: 892-898.

Zachmann, D.W., Duchateau, P.C. et Kulte, A. (1981). "The Calibration of the Richards Flow Equation for a Draining Column by Parameter Identification." Soil Sci. Soc. Am. J. **45**: 1012-1015.

## ANNEXES

### Annexe 1 Structure et fonctionnement du programme de simulation.

Le programme de simulation utilisé a été conçu à l'aide du logiciel Matlab. Il fait intervenir le scripte et les fonctions suivantes :



Les routines sont construites comme suit :

Richards : Discrétisation du domaine de calcul, identification des conditions aux limites, choix du pas de temps, algorithme de résolution;

Tables.m : Construction de la table des noeuds , de la table de connectivité et de la table de numérotation;

Système.m : Création et initialisation du système global d'équations;

Éléments.m : Construction des termes élémentaires;

Assemblage.m : Assemblage des termes élémentaires.

Le script et les fonctions précédemment décrites sont disponibles sur demande. Veuillez vous adresser au Pr. Michel Perrier.

## Annexe 2 Structure et fonctionnement du programme estimateurs/observateur.

Le programme utilisé pour l'observation et l'estimation de paramètres fonctionne un peu comme celui présenté à l'annexe 1. Il fait par contre intervenir un scripte supplémentaire appelée « estimateur/observateur » qui est utilisée à chaque pas de temps pour construire les prédictions. Les fonctions `Système_est.m` et `Éléments_est.m` sont modifiées pour construire les prédictions et non les mesures.

